OSNOVNA ŠOLA LIVADA
Efenkova cesta 60, 3320 Velenje

MLADI RAZISKOVALCI ZA RAZVOJ ŠALEŠKE DOLINE

RAZISKOVALNA NALOGA

NI TAKO DALEČ KOT SE ZDI!

Tematsko področje: matematika in logika

Avtorici:
Tisa Ževart, 9. razred
Špela Pušnik, 9. razred

Mentorja:
Uroš Kuzman, univ. dipl. mat.
Metoda Finkšt, predm. učit. mat. in fiz.

Velenje, 2009

Raziskovalna naloga je bila opravljena na Osnovni šoli Livada.

Mentorja: Uroš Kuzman, univ. dipl. mat.
Metoda Finkšt, predm. učit. mat. in fiz.

Datum predstavitve:

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

ŠD OŠ Livada, 2008/2009

KG razdalja / manhattan razdalja / krožnica / simetrala / metrika / geometrija / najkrajša pot / kolesarsko omrežje

AV ŽEVART, Tisa, PUŠNIK, Špela

KZ 3320 Velenje, SLO, Efenkova 60

ZA Mladi raziskovalci za razvoj Šaleške doline

LI 2009

IN NI TAKO DALEČ KOT SE ZDI!

TD RAZISKOVALNA NALOGA

OP V, 25 s., 21 slik, 1 tab., 1 fotog., 1 pril., 18 ref.

IJ SL

JI sl

AI Raziskovalna naloga sega na področje logično dojemljive matematike. Poleg širokega razumevanja konceptov ne terja posebnih matematičnih predznanj. Bralca vodi od konkretnih primerov do razumevanja splošnih idej, predstavi pa tudi aplikativno vrednost nekaterih vzorcev.
V prvem delu spoznavamo koncept razdalje. S primeri iz vsakdanjega življenja se naučimo dojeti njene bistvene lastnosti, ki jih nato zapišemo v obliki matematičnega pojma – metrike. Seznanimo se s krožnico in simetralo, osnovnima geometrijskima objektoma, definiranima z razdaljo.
V drugem delu naloge je teoretično znanje uporabljeno v praksi. S pomočjo matematične metode je analizirano kolesarsko omrežje in ocenjena njegova kvaliteta z vidika osnovnošolca. Želeli smo ugotoviti, če, koliko in kako bi bilo potrebno (pre)oblikovati kolesarske steze v Velenju, da bi te še bolj koristile osnovnošolcem. Pri kriteriju dostopnosti je uporabljena tudi »manhattan razdalja«, ki predvideva le gibanje v vodoravni in navpični smeri. Kljub odstopanjem stanja v prostoru od pravilnih oblik zadovoljivo opisuje pot do najbližje točke, ki kolesarju omogoča vključitev v kolesarsko omrežje.

KAZALO

KAZALO SLIK, FOTOGRAFIJ, TABEL IN PRILOG

SEZNAM V NALOGI UPORABLJENIH OKRAJŠAV

cm – centimeter; centimetrov
d – razdalja
d_{ptt} – poštna razdalja
et al. – in drugi
km – kilometer; kilometrov
km/h – kilometrov na uro
npr. – na primer
ZDA – Združene države Amerike

1 UVOD

Galileo Galilei (italijanski fizik, matematik, astronom in filozof; 1564-1642) je v pismu, ki ga je leta 1623 napisal prijatelju Virginiu Cesariniju, zapisal: »Knjiga narave je napisana v matematičnem jeziku; kdor se ga ni naučil, ne more v njej razumeti niti ene same besede …« (Župančič, 2006).
Četudi tega citata ne moremo razumeti dobesedno, izziva in vzbuja nemalo zanimanja. Koliko resnice je v njem? Ima matematika res kaj skupnega z naravo, z okoljem, ki nas obdaja? Je lahko matematični jezik tisti, ki pomaga do razumevanja sveta?

Matematika ima, vsaj kot šolski predmet, za večino precej negativen prizvok. Mnogokrat slišimo vprašanja in pomisleke o tem, zakaj in čemu se sploh učiti matematike; tistega, kar je več od vsakodnevno uporabnega računanja. Le redki v matematiki iščejo globlje odgovore ali celo zabavo in svojevrstno lepoto njenih zakonitosti.
To so bila razmišljanja, ki so nas napotila na pot v neznano. Odkrivati drugačen svet, svet matematike in logike. Raziskovanja pa ni bilo povsem enostavno začeti. Najprej je bilo potrebno poiskati primerno temo, ki bi ne bila prezahteven zalogaj za devetošolki, ki se takšne naloge lotevata prvič.
Ko se nekoliko odmaknemo od matematičnega šolskega programa, najdemo precej tem, ki v bistvu ne zahtevajo posebnega predznanja. Razumljive so lahko popolnoma laičnemu bralcu, s pomočjo logike pa lahko vsebine razvijamo v različne smeri.
Čeprav je matematikovo delo predvsem tovrstne vsebine razumeti širše in znati njihove bistvene značilnosti opisati v matematičnem jeziku, smo skušali za naše raziskovanje izbrati takšno temo, ki bi jo bilo moč uporabiti tudi pri reševanju problemov oziroma aktualnih vprašanj, vezanih na Šaleško dolino. To pa je, zaradi idealnosti pogojev in idej v matematični teoriji, na osnovnošolskem nivoju sila težko. Vseeno smo z nekaterimi poenostavitvami in prilagoditvami podali demonstrativni zgled uporabe, ki skuša vsebinsko zaključiti celoto raziskovalne naloge in jo povezati z lokalnim okoljem.
Kot pojem, s katerim se redno srečujemo v vsakdanjem življenju, hkrati pa zanimiv matematični pojem, se je primerna za obravnavo ponudila razdalja. Na naslednjih straneh lahko bralec prehodi pot seznanjanja z metriko in ugotavlja, ali nam bo vsaj za ped uspelo skrajšati na videz nepremostljivo razdaljo, ki loči šolarje od ljubiteljev matematike.

2 PREGLED OBJAV

Za spoznavanje z obravnavano tematiko smo poiskali več člankov v strokovnih in poljudno-znanstvenih revijah, precej informacij pa smo našli tudi na svetovnem spletu. Izmed spletnih virov smo največkrat uporabili prosto dostopno spletno enciklopedijo z imenom Wikipedia (http//en.wikipedia.org), ki postaja za mlade raziskovalce ne le lahko in hitro dostopna pot do informacij, ampak je kot vir tudi vedno zanesljivejša, saj pri oblikovanju objavljenih prispevkov sodeluje vedno več priznanih strokovnjakov. Žal je slovenska različica enciklopedije vsebinsko še precej okrnjena, zato smo morali, kot pri večini spletnih virov, uporabiti znanje angleškega jezika. Pri seznanjanju z definicijami, povezanimi s predmetom raziskovanja, smo si pomagali tudi z osnovnošolskimi matematičnimi učbeniki.
Ob branju člankov, ki govorijo o razdalji in sorodnih vsebinah smo se prvič srečali z obsežnejšimi teoretičnimi zapisi o matematičnih vprašanjih in se tako spoznali z načinom in značilnostmi poljudno-znanstvenega pisanja različnih zahtevnostnih stopenj v matematični

stroki. V nalogi tako praktično ni dobesednih navedkov iz izbranih gradiv, saj je praksa pri oblikovanju poljudnih in strokovnih gradiv z matematično vsebino povzemanje vsebine nekega vira, ki ga na koncu naloge ali v tekstu podamo kot sklic – navedeno gradivo, ki potrjuje verodostojnost zapisanega. Prav tako smo po vzoru prebranih člankov in drugih objav s področja matematike v nalogo vključili precej slikovnega gradiva, ki služi predvsem za nazornejšo ponazoritev predstavljene vsebine in boljše razumevanje naloge, ki je, vsaj v prvem delu, precej teoretično naravnana. Vse slike smo izdelali sami.

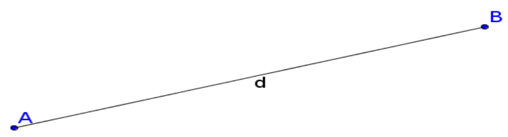
3 METODOLOGIJA

Raziskovanje v svetu matematike smo začeli s spoznavanjem osnov matematične teorije. Najprej smo se seznanjali s primeri razdalje iz vsakodnevnega življenja, nato pa smo definicijo razdalje zapisali v splošnem matematičnem jeziku (*induktivno razmišljanje*). Ko nam je bil pojem razdalje dovolj domač, smo se začeli ukvarjati z objekti, ki so definirani s pomočjo razdalje – s simetralo in s krožnico (*deduktivno razmišljanje*).
Pri delu smo za risanje slik uporabljali računalniško programsko orodje Geogebra. To je program za dinamično geometrijo, v katerem lahko narišemo slike, povezane z geometrijo v ravnini ali z množicami točk. Lahko pa rišemo tudi objekte, opisane z enačbami. Uporabili smo tudi znakovno pisavo Chess Alpha, ki nam je omogočila slikovno prikazati primere šahovske razdalje.
V drugem, aplikativnem delu naloge, smo za ovrednotenje kakovosti kolesarskega omrežja v Velenju po vzoru študije Inštituta za ekološke raziskave ERICo Velenje, izdelali poseben točkovnik. Gre za neke vrste poenostavljeno statistično metodo, ki je pravzaprav zasnovana zgolj na osnovi logičnih premislekov, vrednotenje pa je prilagojeno potrebam osnovnošolcev. Zanjo nismo potrebovali posebnega predznanja ter podrobnejšega seznanjanja s statistično metodologijo.
Za potrebe točkovanja smo opravili tudi nekaj terenskega dela, saj podatki o kolesarskem omrežju, ki smo jih dobili v Uradu za okolje in prostor Mestne občine Velenje, niso bili skladni z dejanskim stanjem. Tako smo »in situ« preverili, kje je bilo omrežje ob obnovah cest v zadnjih mesecih že dopolnjeno.
Po ocenjevanju kolesarskih stez s pomočjo točkovnika smo opravili analizo dobljenih rezultatov in na podlagi te oblikovali predlog izboljšave oziroma dopolnitve kolesarskega omrežja.
Na tem mestu naj povemo tudi, da je struktura pričujoče naloge morda nekoliko nestandardna. Navodila za oblikovanje raziskovalnih nalog niso najbolj »pisana na kožo« izdelkom s področja matematike, kar je zaradi maloštevilnosti le-teh seveda povsem razumljivo. Upoštevali smo, da poglavje Razprava zajema tisti del raziskovalnega dela, ki temu daje največjo težo. V naši nalogi sta to poglavji 4 (Razdalja) in 5 (Analiza kolesarskega prometa v mestni občini Velenje). V prvem delu razprave so v veliki meri znane matematične vsebine dopolnjene s samostojno oblikovanimi primeri. Oboje skupaj zaradi idejne povezanosti tvori nerazdružljivo celoto in sledi obliki strokovnih člankov s področja matematike. Drugi del je vsebinsko in metodološko bližje družboslovnim vedam, saj obravnava problem s področja prostorskega načrtovanja. V njem je enovito predstavljena zveza med prvim, teoretičnim delom naloge, in novim, aktualnim predmetom raziskovanja. Zaradi vsebinskih razlik med obema pomensko sicer enakovredno tehtnima deloma naloge, v uvodnem delu nismo navajali hipoteze, ki bi bila glavni in/ali edini predmet raziskovanja.

4 RAZDALJA

4. 1 Pojem razdalje

V življenju mnogokrat potujemo. Bodisi na delo v drug kraj, bodisi na obisk k prijateljem v sosednjo državo, na počitnice … Ali pa le s prstom po zemljevidu. Pri tem nas običajno zanima dolžina poti, ki jo bomo ali smo jo opravili. Povedano drugače: zanima nas razdalja med dvema točkama. Razdalja je torej podatek, ki nam pove nekaj o medsebojni legi dveh točk oziroma pove, kakšna je dolžina najkrajše poti med dvema točkama.
Pojem razdalje se zdi precej enostaven, a – kot bomo videli v nadaljevanju – poznamo več oblik razdalje.
Predstavljajmo si veliko mesto, v katerem so vse ulice ravne. Križišča so pravilnih oblik, saj ulica seka ulico le pravokotno. Dva prebivalca velikega mesta, eden bogat in drugi manj premožen, morata priti na drugi konec mesta. Prvi se bo usedel v helikopter, drugi pa se bo moral s taksijem peljati po ulicah. Razdalja med izbranima točkama (kjer sta in kamor želita priti) je zanju različna. Premožnejši bo po zračni črti prepotoval krajšo pot kot njegov someščan, ki mora slediti ulicam. Torej je razdalja zanju različna, s tem pa se razlikujejo tudi osnovne lastnosti in pojmi, ki so vezani na razdaljo.
Navadno si razdaljo predstavljamo kot dolžino poti, ki jo je prepotoval premožnejši – torej zračno linijo. To pot lahko ponazorimo z daljico, ki jo narišemo med dvema točkama.



Slika 1: Razdalja v ravnini

Razdaljo med točkama A in B v koordinatnem sistemu izračunamo z enačbo:

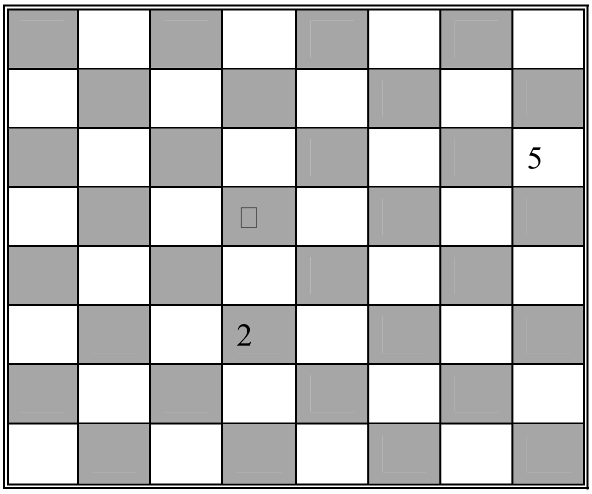
$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Vendar pa se tokrat ne bomo ukvarjali zgolj s tem najnaravnejšim pojmovanjem razdalje, ampak si bomo ogledali nekaj primerov razdalj, ki jih srečujemo v vsakdanjem življenju.

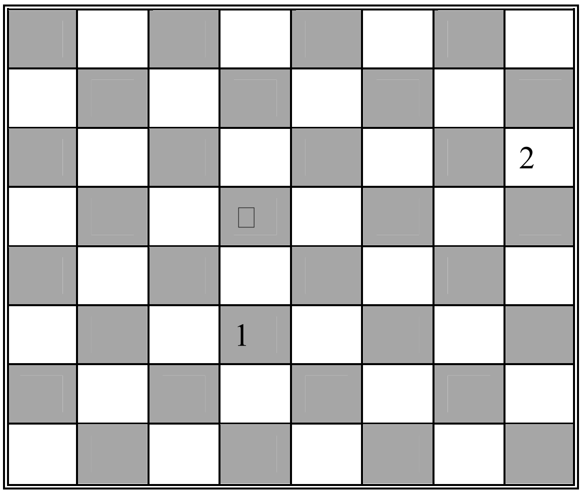
4. 1. 1 Šahovske razdalje

Vsi poznamo šah, igro na deski za dva igralca. Dolgo je veljalo, da šah izvira iz Indije, kjer naj bi ga začeli igrati v poznem 6. ali zgodnjem 7. stoletju, zadnja desetletja pa je vedno več zgodovinarjev mnenja, da šah izvira s Kitajske.
Za igro potrebujemo šahovnico s 64 črno-belimi polji in šest različnih figur (šestnajst kmetov, štiri konje, štiri tekače, štiri trdnjave, dve kraljici in dva kralja). Pravila igre temeljijo na

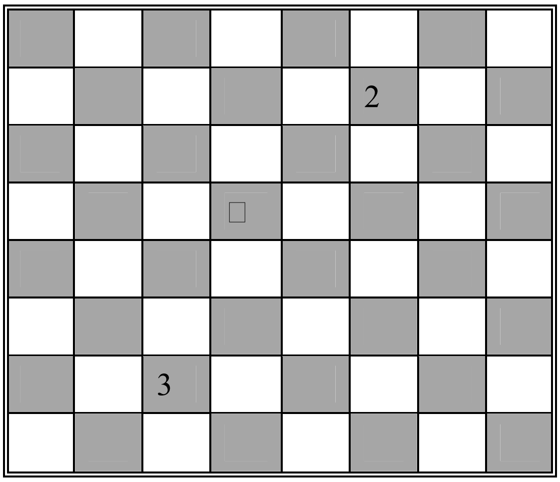
različni moči figur in na tem, da se figure različno premikajo. Kmet se lahko premika le naprej, za eno polje. Konj se lahko premika v katerokoli smer, v obliki črke L (premik za dve polji in eno v stran). Tekač se lahko premika diagonalno, v vse smeri, kralj pa v vse smeri, za eno polje.
Tako pri šahu poznamo dvanajst različnih razdalj – po dve razdalji za vsako figuro: razdaljo s številom polj in razdaljo s številom potez. Poglejmo te razdalje za nekatere od zanimivejših šahovskih figur.



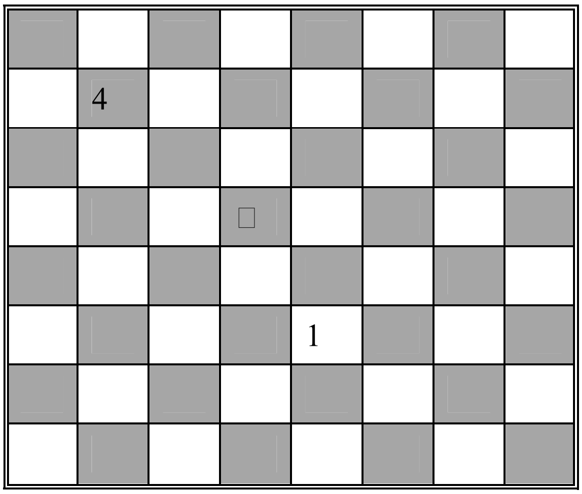
Slika 2: Trdnjavina razdalja za število polj
Označeno je število različnih polj, ki jih prepotuje trdnjava, da pride v izbrani polji.



Slika 3: Trdnjavina razdalja za število potez
Označeno je število potez, ki jih potrebuje trdnjava, da pride v izbrani polji.



Slika 4: Kraljeva razdalja
Označeno je število različnih polj, ki jih prepotuje kralj, da pride v izbrani polji.

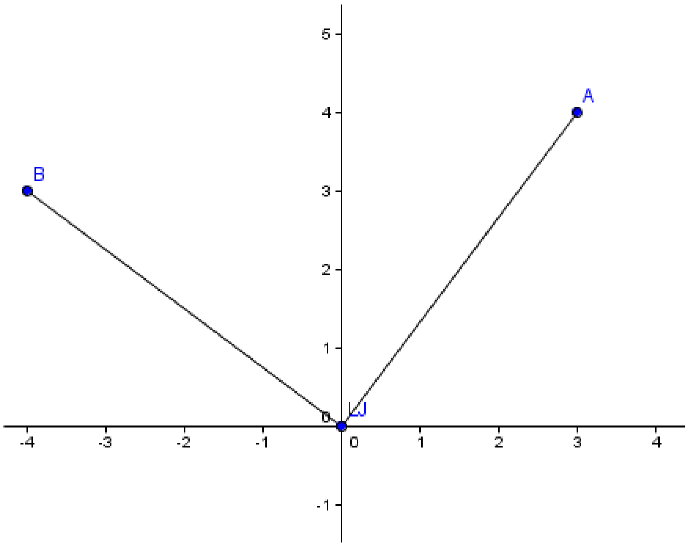


Slika 5: Konjeva razdalja
Označeno je število različnih polj, ki jih prepotuje konj, da pride v izbrani polji.

Razdalji s številom polj in številom potez sta pri kralju in konju enaki.

4. 1. 2 Poštna razdalja

Zanimiva je tudi pot pošiljke, ki jo oddamo na pošti. Denimo, da jo želimo poslati stricu v Kranj. Pošiljko smo oddali v Velenju. Od tod potuje najprej v Ljubljano in šele nato v Kranj. Seveda bi bilo nesmiselno, da bi pošta iz vsakega kraja posebej potovala ločeno v vse druge kraje po Sloveniji. Skupna dolžina prepotovanih poti je namreč manjša, če obstaja nekaj središč, kamor potuje vsa pošta, in jo šele od tam odnesejo v naslovljeni kraj, čeprav je posamezna pot sicer navadno daljša (lahko pa je tudi enaka), kot če bi posamezna pošiljka potovala naravnost v kraj, kjer živi prejemnik. Poštna razdalja je torej razdalja, pri kateri moramo iti najprej v središče in šele nato v naslovljeni kraj.
V koordinatnem sistemu si bomo za središče izbrali koordinatno izhodišče. Tako je razdalja med dvema točkama vsota obeh razdalj do izhodišča.



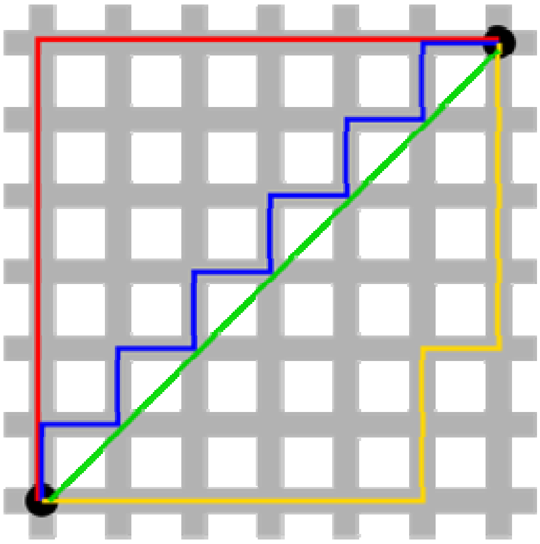
Slika 6: Poštna razdalja v ravnini

Poštno razdaljo izračunamo z enačbo:

$$d_{ptt} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} + \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

4. 1. 3 Manhattan razdalja

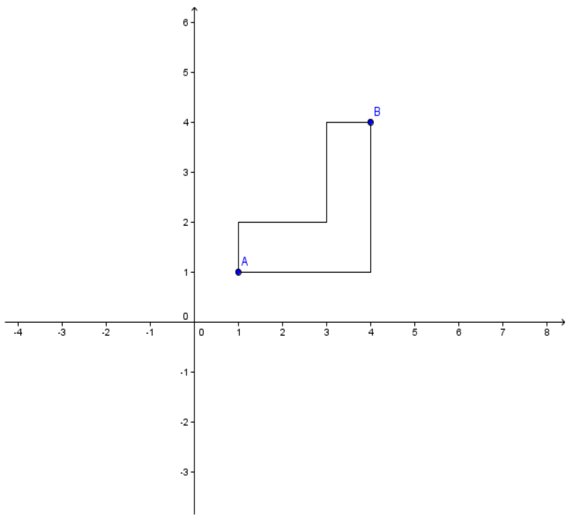
Ena izmed bolj zanimivih razdalj je tako imenovana manhattan razdalja. To razdaljo je v matematiki v 19. stoletju prvi uporabil Herman Minkowski, v mnogih virih pa je navedena kot ena najpreprostejših neevklidskih razdalj. Osnovna lastnost manhattan razdalje je, da kot edino možnost za premikanje dopušča gibanje v horizontalni ali vertikalni ravni črti pod pravim kotom.
Za lažjo predstavo pomislimo na voznika taksija. Voznik mora vedno slediti ulicam – na križišču mora peljati naravnost ali zaviti levo oziroma desno. Na Manhattnu (New York, ZDA) so vse ulice pravilne oblike – enako dolge in s pravokotnimi križišči. Tako je oddaljenost med dvema križiščema za voznika taksija podana z opisano razdaljo. Od tod izvira tudi njeno ime – manhattan razdalja ali taksi razdalja.



Slika 7: Manhattan razdalja

Zelena črta predstavlja najkrajšo razdaljo med točkama v navadni razdalji, modra, rdeča in rumena črta pa predstavljajo najkrajše razdalje v manhattan razdalji. Najkrajša razdalja v manhattan razdalji bi lahko bila tudi katerakoli druga pot, ki bi potekala po pravokotnicah, v navadni razdalji pa je lahko najkrajša le ena pot. Če se vrnemo nazaj in pozorno pogledamo sliko 2, lahko opazimo, da je manhattan razdalja v resnici enaka šahovski razdalji trdnjave za število polj, ki jih ta prepotuje od enega do drugega polja.

Sedaj pa si oglejmo še predstavitev te razdalje v ravnini.



Slika 8: Manhattan razdalja v ravnini

Manhattan razdaljo med točkama A in B lahko izračunamo z enačbo:

$$d(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

4. 1. 4 Metrika

V prejšnjih podpoglavjih smo predstavili nekaj primerov razdalje, sedaj pa jo bomo matematično opisali z definicijo, ki podaja njene bistvene lastnosti.

DEFINICIJA

Razdalja je predpis, ki dvema točkama poda vrednost z naslednjimi lastnostmi (aksiomi razdalje):

I. $d(T_1, T_2) \geq 0$

II. *če je* $d(T_1, T_2) = 0$*, potem je* $T_1 = T_2$

III. $d(T_1, T_2) = d(T_2, T_1)$

IV. $d(T_1, T_3) \leq d(T_1, T_2) + d(T_2, T_3)$

Za zgoraj definirani matematični objekt se v matematiki praviloma uporablja izraz metrika, ki pomeni posplošitev pojma razdalje. Točka I. vsebuje lastnost, da razdalja ni nikoli negativna. Točka II. pove, da je razdalja med dvema točkama enaka 0, če točki predstavljata isto točko. Iz točke III. razberemo, da je dolžina najkrajše poti enaka, če potujemo iz prve v drugo točko ali obratno. Temu pogoju rečemo tudi simetričnost. Nazadnje pa velja, da je najkrajša razdalja med dvema točkama krajša ali enaka vsoti razdalj, kjer potujemo še v vmesno točko. Ta pogoj nam zagotovi, da smo izbrali res najkrajšo razdaljo. Imenujemo ga tudi trikotniška neenakost.

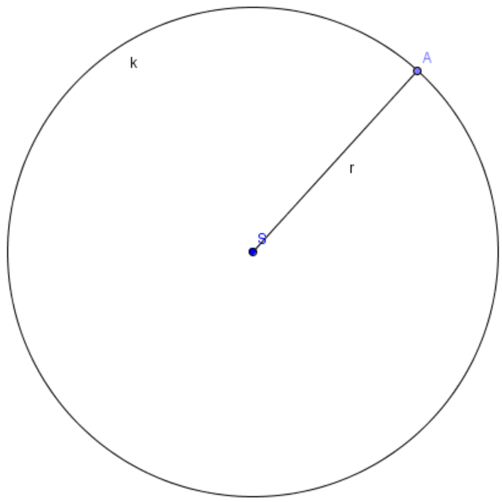
4. 2 Krožnica

Z razdaljo so povezani številni geometrijski pojmi. Eden izmed njih je krožnica. Pojem krožnica največkrat povezujemo z geometrijskim likom krogom. Črto, ki omejuje krog namreč imenujemo krožnica, njeno dolžino pa obseg kroga. Krog matematike privlači že od nekdaj. Arhimed si je že pred dva tisoč leti zamislil postopek, s katerim lahko izračunamo ploščino kroga, že dva tisoč let pred našim štetjem pa so prvič izračunali približek s krogom povezanega števila π. Število π dobimo kot količnik med obsegom in premerom kroga. Danes z računanjem približkov za število π preizkušajo zmogljivost računalnikov. Zapisati ga znajo že z več kot sto milijoni decimalk, kar bi na papirju napolnilo več kot sto knjig s po tisoč stranmi. Tolikšna natančnost je za uporabo sicer brez pomena, pokaže pa, da je število π, ki je skozi tisočletja vznemirjalo matematike, zanje še vedno zanimivo.

V nadaljevanju se ne bomo posvečali klasični obliki krožnice, ampak bomo njeno definicijo podali zgolj z razdaljo.

DEFINICIJA

Krožnica s središčem v S in polmerom r je množica točk, ki so od S oddaljene za r.

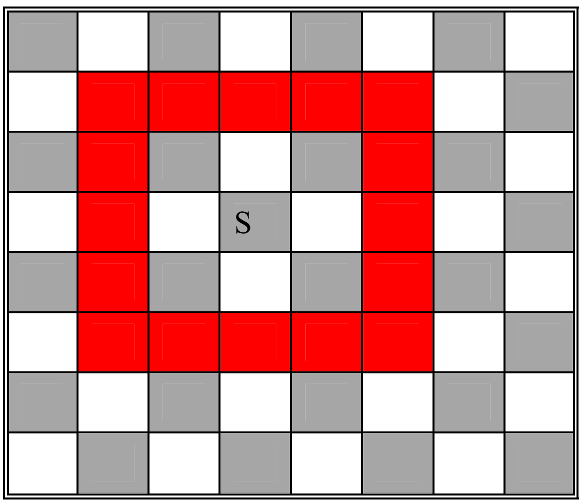


Slika 9: Krožnica v ravnini

Zgornja slika seveda predstavlja krožnico, ki jo dobimo, če izberemo običajno razdaljo, ki smo jo predstavili na samem začetku razprave. Nas pa bodo sedaj zanimale oblike krožnic, podanih z razdaljami, ki smo jih spoznali v nadaljevanju. Naredimo torej krožnice za primere razdalj iz prejšnjega poglavja.

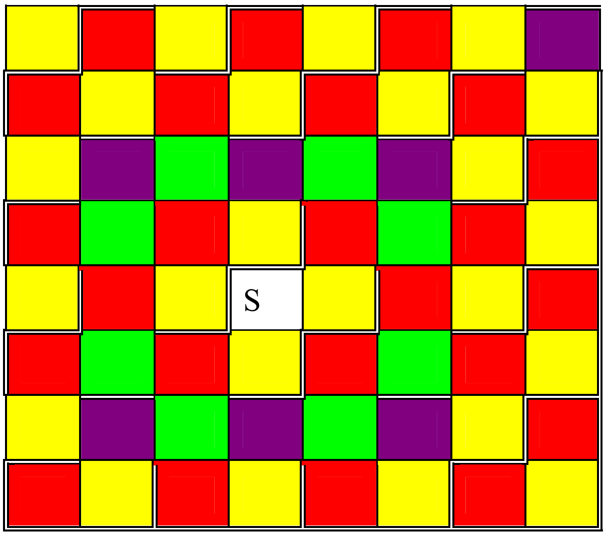
4. 2. 1 Krožnice v šahovskih razdaljah

Ker poznamo pri šahu dva tipa razdalj, poznamo tudi dve vrsti krožnice: krožnico za število polj in krožnico za število potez. Pri prvi iščemo polja, ki so od središča oddaljena za enako število polj, pri drugi pa polja, do katerih lahko pridemo z enakim številom potez.



Slika 10: Krožnica v kraljevi razdalji

Rdeče označena polja tvorijo krožnico s polmerom 2.
Krožnica ima obliko kvadrata.



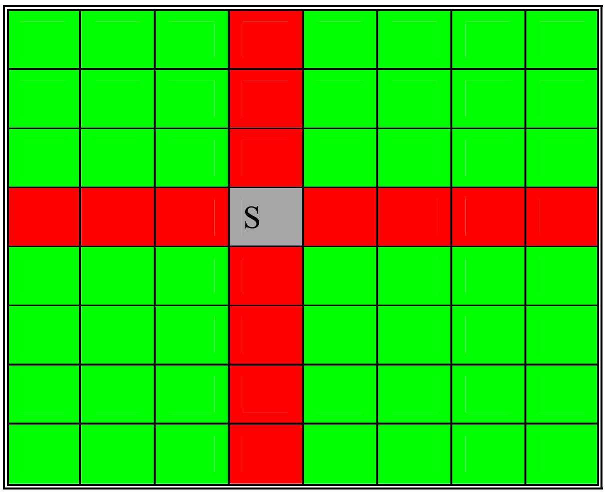
Slika 11: Krožnica v konjevi razdalji

Konjeva krožnica s polmerom 1.

Konjeva krožnica s polmerom 2.

Konjeva krožnica s polmerom 3.

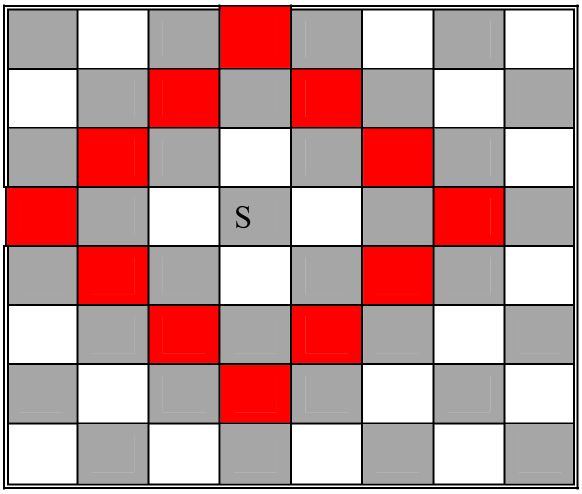
Konjeva krožnica s polmerom 4.



Slika 12: Krožnica v trdnjavini razdalji za število potez

Krožnica s polmerom 1. Krožnica ima obliko križa.

Krožnica s polmerom 2. Krožnica je sestavljena iz štirih pravokotnikov.



Slika 13: Krožnica v trdnjavini razdalji za število polj

Rdeče označena polja predstavljajo krožnico s polmerom 3.
Krožnica ima obliko diamanta.

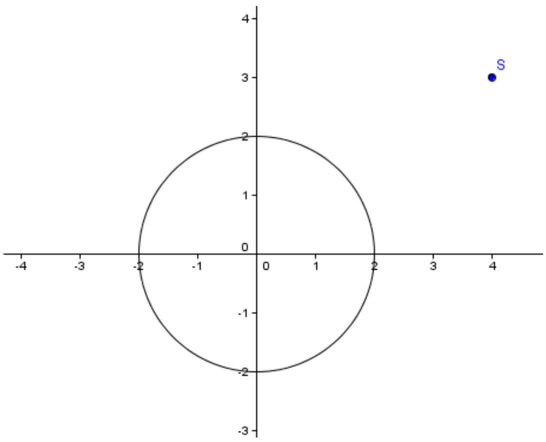
4. 2. 2 Krožnica v poštni razdalji

Krožnico lahko torej narišemo v vseh razdaljah. Tako lahko tudi v poštni razdalji določimo kraje, ki so od središča oddaljeni za neko razdaljo ali pa so mu bliže. Zanimivo pa je, da v poštni razdalji središče leži zunaj krožnice, in ne v njeni sredini kot v drugih razdaljah.

Za središče izberimo na primer točko S (x,y). Potrebujemo še oddaljenost središča od izhodišča, ki jo izračunamo z enačbo:

$$d = \sqrt{y^2 + x^2}$$

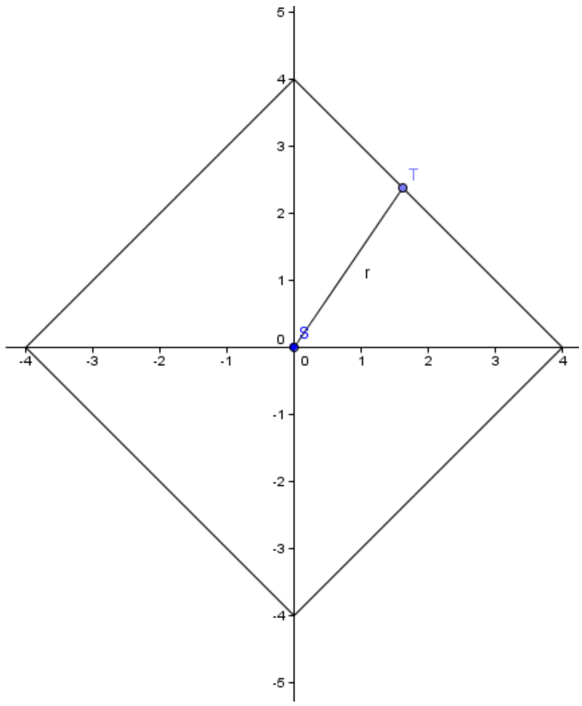
Če je polmer enak oddaljenosti središča od izhodišča, bo krožnico predstavljalo kar izhodišče. V primeru, da je polmer manjši od oddaljenosti središča od izhodišča, je krožnica prazna množica. Primer, ko je polmer večji od oddaljenosti središča od izhodišča, pa je prikazan na spodnji sliki.



Slika 14: Krožnica v poštni razdalji

4. 2. 3 Krožnica v manhattan razdalji

Za boljšo ilustracijo si tokrat najprej zastavimo problem.
Na banki se je pred desetimi minutami zgodil rop. Ropar je bil pešec. Katero območje mora policija zapreti, če predpostavimo, da se ropar giblje s hitrostjo 6 km/h? Rešitev je sledeča. Banko si predstavljamo kot točko S. Ker se je rop zgodil pred desetimi minutami, torej pred eno šestino ure (ropar pa se giblje s hitrostjo 6 km/h), ugotovimo, da je ropar prišel 1 km daleč od banke. Policija mora zapreti območje kroga s polmerom 1 km. Ker banka stoji v mestu in ropar beži po »pravilnih« ulicah, si pomagamo z manhattan razdaljo.
Kot smo zaradi povezave med trdnjavino in manhattan razdaljo pričakovali, ima tudi tu krožnica obliko kvadrata.



Slika 15: Krožnica v manhattan razdalji

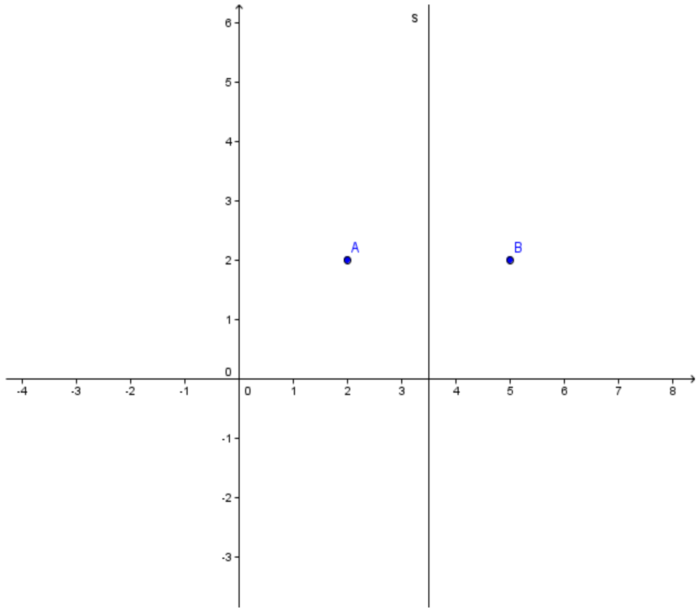
Naj kot zanimivost povemo še, da je dolžina krožnice enaka $4r\sqrt{2}$, torej štirim diagonalam kvadrata s stranico dolžine r.
Če se torej spomnimo opisa števila π kot razmerja med dolžino krožnice in premera, ugotovimo, da je vrednost števila π na Manhattnu enaka $2\sqrt{2}$.

4. 3 Simetrala

V geometriji je dobro poznan tudi pojem simetrale. Pojavlja se v različnih kontekstih. Predstavimo nekatere najpogostejše.
Simetrala kota je premica, ki razpolovi dani kot. Simetrala stranice je pravokotnica, ki poteka skozi razpolovišče daljice. Simetrala lika je os, ki razdeli lik v simetrične dele. Nas pa simetrala seveda zanima z vidika razdalje, zato si bomo podrobneje ogledali simetralo med dvema točkama.

DEFINICIJA

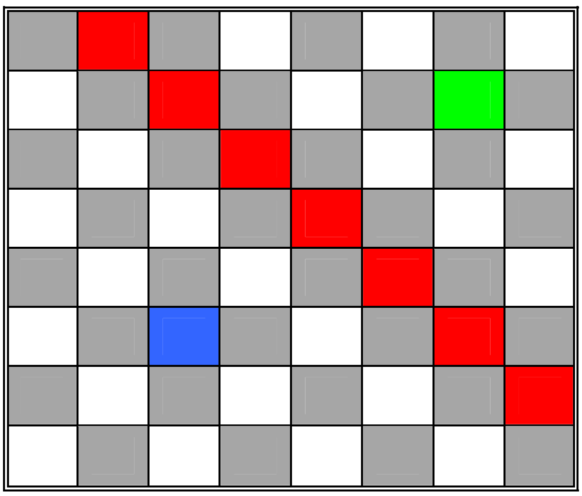
Simetrala med točkama A in B je množica točk, ki so enako oddaljene od A in B.



Slika 16: Simetrala v ravnini

Kakor pri krožnici, je tudi tukaj ponazorjena simetrala v običajni razdalji. Znova pa se z razdaljo spremenijo tudi oblike simetrale. Ker pa so te precej bolj zapletene kot krožnice, bomo podali samo nekatere primere.

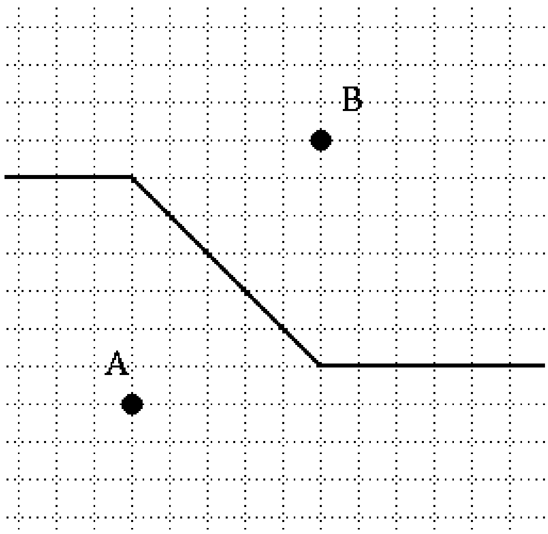
Primer, ki ga predstavljamo najprej, je simetrala v kraljevi razdalji. Na šahovnici želimo med dvema figurama poiskati polja, ki so od obeh figur enako oddaljena. Polji, na katerih stojita figuri, označimo zeleno in modro. Med njima narišemo simetralo, ki jo označimo rdeče.



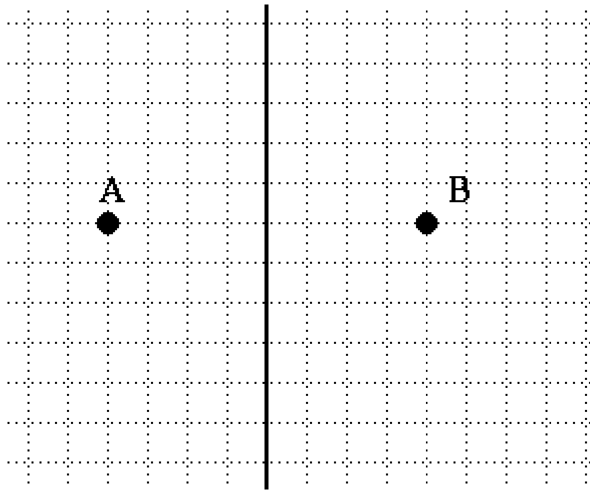
Slika 17: Simetrala v kraljevi razdalji

Rdeče označena polja prikazujejo simetralo v kraljevi razdalji med zelenim in modrim kvadratkom.

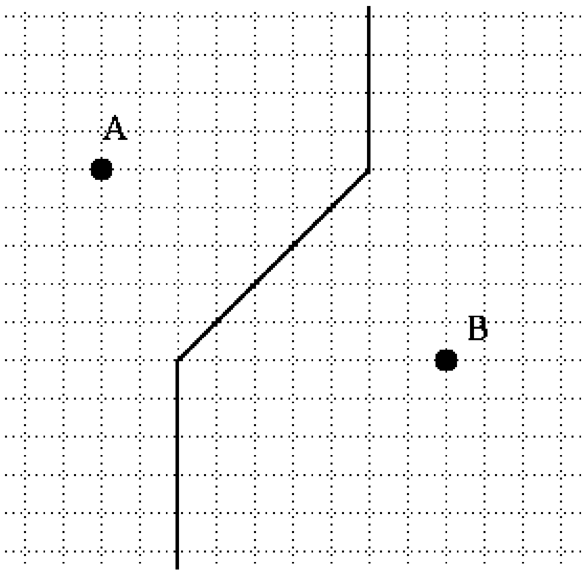
Primere simetral si bomo ogledali še v manhattan razdalji. Tu poznamo štiri oblike simetral, ki so odvisne od medsebojne lege točk, med katerima želimo narisati simetralo.



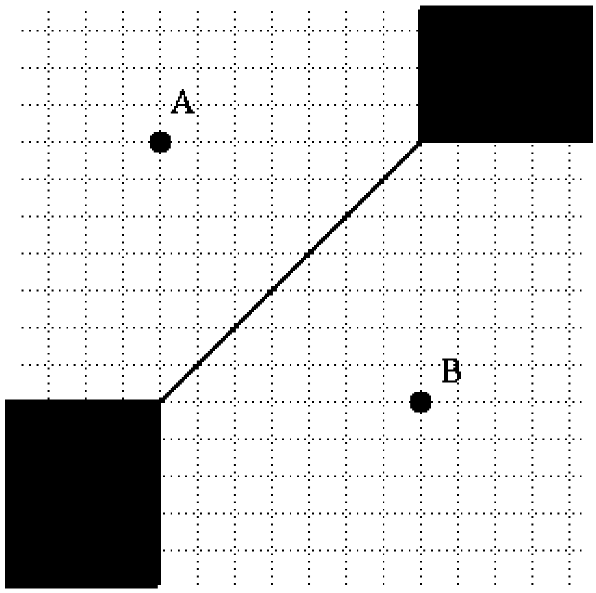
Primer 1: $|x_A-x_B| < |y_A-y_B|$



Primer 2: $x_A = x_B$



Primer 3: $|x_A-x_B| > |y_A-y_B|$

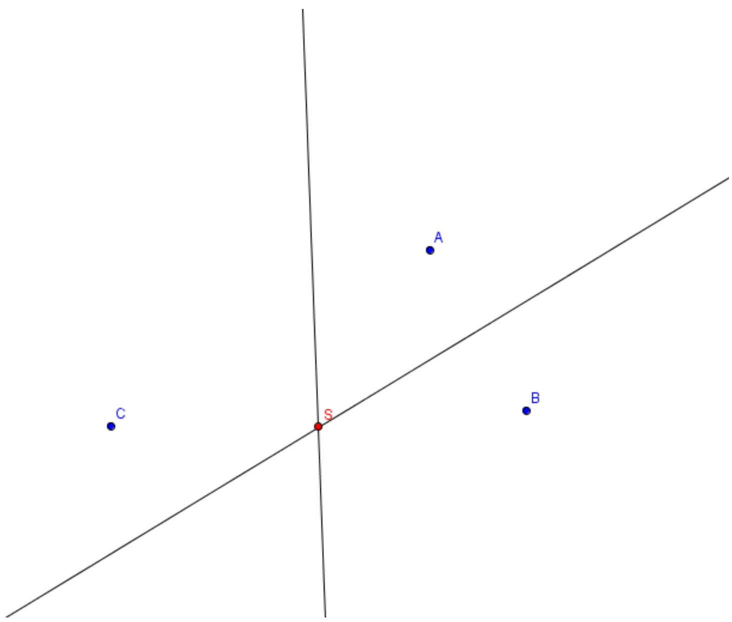


Primer 4: $|x_A-x_B| = |y_A-y_B|$

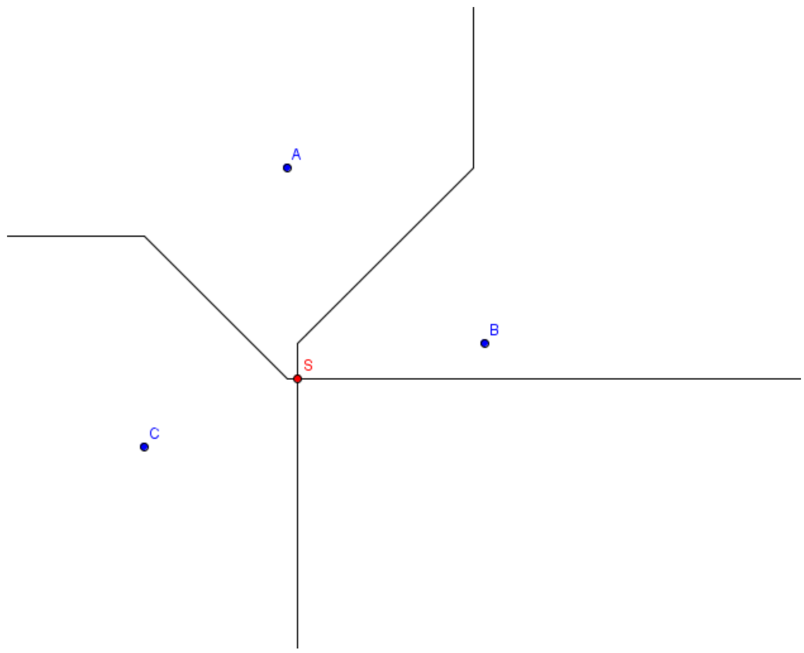
Slika 18: Simetrale v manhattan razdalji

S pomočjo simetrale lahko rešimo različne praktične probleme. Za ilustracijo navajamo naslednjega.
Trije sosedje se dogovarjajo, kam bi postavili skupno satelitsko anteno. Oddaljena naj bi bila enako od vseh treh hiš. Hiše si predstavljajmo kot točke A, B in C.

Rešitev:
Najprej poiščemo točke, ki so enako oddaljene od točk A in B. Te točke ležijo na simetrali daljice AB. Nato poiščemo še točke, ki so enako oddaljene od točk B in C. Te točke ležijo na simetrali daljice BC. Simetrali se sekata v točki, ki leži na obeh simetralah, torej je enako oddaljena od točk A, B in C. Na točko, kjer se simetrali sekata (točka S) postavimo satelitsko anteno.



Slika 19: Rešitev naloge v navadni razdalji



Slika 20: Rešitev naloge v manhattan razdalji

5 ANALIZA KOLESARSKEGA OMREŽJA V MESTNI OBČINI VELENJE

Osnovni namen tega poglavja je, kakor smo navedli že v uvodu, s pridobljenim teoretičnim znanjem odgovoriti na katero izmed aktualnih vprašanj lokalnega značaja. Odločali smo se med različnimi problemi, ki se jih da rešiti z geometrijskimi pojmi.
Sprva smo v nalogi želeli prikazati najkrajše razdalje od določenih točk (na primer osnovnih šol, stanovanjskih blokov …) do posameznih gasilskih domov ter do zdravstvenega doma (nujne medicinske pomoči). Tako bi lahko s pomočjo obravnavanih matematičnih pojmov in metodologije poiskali in ponazorili najprimernejše (najkrajše) intervencijske poti.
Aktualna snov za obravnavo je tudi mestni potniški promet, ki je v našem mestu še sorazmerna novost. V prvih mesecih obratovanja se je zdelo, da bi lahko bilo postajališč več. Tako smo razmišljali, da bi s pomočjo manhattan razdalje in krožnice v manhattan razdalji poiskali predloge za lokacije novih (dodatnih) postajališč, ki bi jih lahko utemeljevali z enakomernejšimi oddaljenostmi od različnih naselij in javnih objektov … Vendar so z novim letom že uvedli nekaj novih postajališč, tako da se ta problem ni zdel več dovolj aktualen. Nazadnje smo se odločili za analizo kolesarskega prometa. Ta je z vidika mladih vedno dovolj zanimiva tema. Pogosto je čas med koncem pouka in drugimi obveznostmi osnovnošolca (obšolskimi dejavnostmi) skopo odmerjen. Mestni potniški promet kljub relativni pogostosti voženj tako ni vedno možna izbira, prav tako je potrebno pot (npr. do stadiona) včasih težko pravočasno prehoditi peš. Tako je kolo dostikrat edina možna izbira. Kako izboljšati kolesarsko omrežje, da bo kar najbolj koristilo nam, osnovnošolcem, in tudi sicer pritegnilo čim več uporabnikov? Slednje je zagotovo zaželeno in pomembno tudi z vidika varstva okolja, zdravega načina življenja in ustvarjanja prijaznejšega utripa v mestnem središču (manj prometa, manj gneče na parkiriščih), nenazadnje pa je v trenutnih gospodarskih razmerah kolo kot prevozno sredstvo dobra izbira tudi z vidika zniževanja stroškov.

Na podlagi lastnih izkušenj vemo, da ima kolesarsko omrežje v Velenju kar nekaj pomanjkljivosti. Kolesarske steze, predvsem tiste, ki jih urejajo v zadnjem času, so sicer dobro urejene, vendar so med seboj slabo povezane. Ko smo pregledali obstoječe gradivo o kolesarskem omrežju v Velenju (Špeh, Ostruh, 2006) smo naše mnenje potrdili. Strokovnjaki z Inštituta za ekološke raziskave ERICo Velenje v omenjeni raziskavi, ki so jo pripravili po naročilu Mestne občine Velenje, ugotavljajo, da je obstoječe omrežje nesklenjeno, nepovezano, nevarno in slabo dostopno. V študiji avtorji predlagajo novo kolesarsko omrežje, ki naj bi omogočalo vsakodnevno kolesarjenje (prevoz na delo, v šolo, na območja rekreacije). Na podlagi terenskih pregledov so zasnovali široko ponudbo možnosti za rekreativne kolesarje, od lahkih, pretežno ravninskih poti, do ekstremnih, gorskih kolesarskih poti za najzahtevnejše kolesarje, kjer je poleg premagovanja hujših vzponov občasno potreben tudi sestop s kolesa. Kot prednostne dejavnosti, ki naj bi jih kolesarsko omrežje povezovalo, so upoštevali predvsem območja storitev (vključeni tudi avtobusna in železniška postaja), industrijska območja (zaposlitev), rekreacijske površine in stanovanjska območja. Ker pa nas zanima predvsem uporabnost kolesarskega omrežja z vidika osnovnošolcev, smo se osredotočili na kolesarsko dostopnost tistih objektov, ki jih osnovnošolci zaradi svojih dejavnosti najpogosteje obiskujejo.
Našo matematično pozornost pa je vzbudilo predvsem nekaj. Velenje je (poleg nikoli dograjenega Kidričevega) edino mesto v Sloveniji, ki je na novo zgrajeno ob industrijski bazi (Poles, 2001). Mesto se ni razvijalo spontano, ni raslo iz starega trškega jedra pod Velenjskim gradom, ampak je zgrajeno na podlagi načrtov, ki so jih po drugi svetovni vojni pripravili arhitekti in urbanisti. Tako je Velenje načrtovano v več conah. Prvotni načrt Velenja je

predvideval povsem pravilno prometno mrežo, ki jo je kasneje arhitekt Janez Trenz nekoliko zmehčal (Korpnik, 2000). Kljub temu je s tlorisa mestnega središča (ali pa s pogledom z Velenjskega gradu) mogoče razbrati za večino mest precej nenavadno geometrijsko pravilno oziroma urejeno mrežo ulic in cest. Tako se nam je porodilo vprašanje, ali lahko za primer velenjskega mestnega središča z relativno natančnostjo kot pomožno metodo pri prostorskih vprašanjih uporabimo princip manhattan razdalje.

5. 1 Točkovnik za ocenjevanje kvalitete kolesarskega omrežja z vidika uporabnika – osnovnošolca

Po vzoru študije inštituta ERICo smo izdelali lastni točkovnik za ocenjevanje kolesarskega omrežja. Razdelili smo ga na tri dele oziroma kriterije. Ocenjevali smo uporabnost, varnost in povezanost kolesarskih stez. Uporabnost stez smo točkovali glede na bližino objektov, ki so pomembni za osnovnošolskega uporabnika.

Posebej smo točkovali oddaljenost (50, 100 ali 150 metrov) kolesarske steze od objektov, ki so namenjeni prostočasnim, obšolskim in šolskim dejavnostim. K objektom za prostočasne dejavnosti smo šteli tudi Velenjsko in Škalsko jezero, saj njuno okolico in vodne površine veliko osnovnošolcev v prostem času uporablja za rekreacijo. Pri tem velja dodati, da smo vse oddaljenosti ugotavljali »kabinetno«, torej z risanjem manhattan krožnic na kartografsko podlago.

Hiter pogled na karto mestne občine Velenje pove, da tlorisno ta sicer nikakor ni Manhattan in da ulice nimajo povsod pravilne oblike. Vendar pa nas zanima le območje, ki je v bližini nekega objekta. V večini primerov pa so na teh »mikro lokacijah« ulice pravilnih oblik; vzporedne oziroma pravokotne na »glavno« ulico obravnavanega okoliša. Upoštevati moramo tudi to, da pot do kolesarskega omrežja praviloma opravimo kot pešci. Tako imamo na voljo še prehode, podhode, poti, ki niso označeni na karti. Navedeno nas navaja na smiselnost uporabe manhattan razdalje.

Dani objekt vzamemo za središče in pogledamo, ali krožnica s polmerom 50, 100 oziroma 150 metrov preseka kolesarsko stezo. Tedaj je objekt v ustreznem razredu. Pri tem velja poudariti tudi, da so krožnice različno obrnjene – glede na »glavno« ulico v svoji bližini. Tako izračunana razdalja se seveda lahko razlikuje od dejanske najkrajše poti, vendar pa znotraj razredov ne prihaja do velikih napak. Zato je metoda dovolj dobra, da poda kvaliteten odgovor na vprašanje, ki smo si ga zastavili.

Slika 21: Ugotavljanje oddaljenosti objektov s krožnico v manhattan razdalji - primer kolesarske steze ob Kidričevi cesti

Točkovnik:

1. kriterij UPORABNOST

Objekt za prostočasne dejavnosti, ki je oddaljen manj kot 150 metrov: 1
Objekt za prostočasne dejavnosti, ki je oddaljen manj kot 100 metrov: 2
Objekt za prostočasne dejavnosti, ki je oddaljen manj kot 50 metrov: 3

Objekt za obšolske dejavnosti, ki je oddaljen manj kot 150 metrov: 2
Objekt za obšolske dejavnosti, ki je oddaljen manj kot 100 metrov: 3
Objekt za obšolske d ejavnosti, ki je oddaljen manj kot 50 metrov: 4

Šolski objekt, ki je oddaljen manj kot 150 metrov: 3
Šolski objekt, ki je oddaljen manj kot 100 metrov: 4
Šolski objekt, ki je oddaljen manj kot 50 metrov: 5

Tako smo med drugim ugotovili: od kolesarske steze ob Kidričevi cesti sta manj kot 50 m oddaljena kotalkališče in OŠ Mihe Pintarja Toleda, manj kot 100 m Knjižnica Velenje, manj kot 150 m pa Multimedijski center Kunigunda, zdravstveni dom in župnišče sv. Martin; od kolesarske steze ob Tomšičevi cesti sta manj kot 100 m oddaljeni glasbena šola in telovadnica Šolskega centra Velenje, le za 25 m pa kriterij »manj kot 150 m« presegata osnovni šoli Antona Aškerca in Gustava Šiliha; objekti, ki so od 50 do 150 m oddaljeni od kolesarske steze ob Šaleški cesti so: kino, Vila Mojca, bazen in nova avtobusna postaja, oddaljenost kulturnega doma pa je 170 m; kolesarska steza Celjska–Foitova–Partizanska nas pripelje najbližje k Rdeči dvorani (35 m), Velenjskemu gradu (140 m) in cerkvi v Starem Velenju (70 m).

2. kriterij VARNOST

Ob zelo prometni cesti, enosmerna steza, ločena s črto: 1
Ob zelo prometni cesti, enosmerna, dvignjena steza: 2
Ob zelo prometni cesti, dvosmerna steza, ločena s črto: 3
Ob zelo prometni cesti, dvosmerna, dvignjena steza: 4

Ob srednje prometni cesti, enosmerna steza, ločena s črto: 3
Ob srednje prometni cesti, enosmerna, dvignjena steza: 4
Ob srednje prometni cesti, dvosmerna steza, ločena s črto: 5
Ob srednje prometni cesti, dvosmerna, dvignjena steza: 6

Ob manj prometni cesti, enosmerna steza, ločena s črto: 4
Ob manj prometni cesti, enosmerna, dvignjena steza: 5
Ob manj prometni cesti, dvosmerna steza, ločena s črto: 6
Ob manj prometni cesti, dvosmerna, dvignjena steza: 7

Kolesarska steza ločena od ceste: 8

Pri ocenjevanju varnosti kolesarskih stez smo upoštevali prometnost ceste, ob kateri steza poteka, dejstvo, ali steza poteka v obe smeri ali je enosmerna, in ločenost steze od cestišča. Kot tretji kriterij – povezanost – pa smo preverjali, ali je kolesarska steza vključena v omrežje: na obeh straneh; na eni strani; v omrežje sploh ni vključena.

3. kriterij POVEZANOST

Nesklenjena: 3
Sklenjena na eni strani: 6
Sklenjena na obeh straneh: 9

5. 3 Rezultati analize kolesarskega omrežja

Po zgoraj predstavljenem točkovniku smo ocenili kolesarske steze ob Šaleški, Tomšičevi in Kidričevi cesti, kolesarsko stezo čez Pesje, stezo ob Cesti Simona Blatnika, stezo, ki poteka od Celjske ceste po Foitovi in Partizanski cesti, novo kolesarsko stezo ob Paki (od Osnovne šole Antona Aškerca do Nakupovalnega centra Supernova) in stezo ob Goriški cesti. Rezultate točkovanja podajamo v spodnji tabeli.

KOLESARSKA STEZA	UPORABNOST	VARNOST	POVEZANOST	SKUPNO ŠTEVILO TOČK
ob Kidričevi cesti	14	6	6	26
ob Tomšičevi cesti	6	6	6	18
ob Šaleški cesti	4	4	9	17
ob Paki	5	8	3	16
ob Celjski, Foitovi in Partizanski cesti	8	2	3	13
ob Goriški cesti	3	5	3	11
ob cesti Simona Blatnika	0	7	3	10
čez Pesje	0	4	3	7
celotno omrežje	40	44	36	116

Tabela 1: Rezultati točkovanja kolesarskega omrežja

Ob ocenjevanju varnosti kolesarskih stez smo ugotovili, da jih je precej slabo ločenih od površin za pešce. Marsikje je pločnik od kolesarske steze ločen le z narisano črto, ker pa je preozek, pešci in kolesarji večkrat uporabljajo skupne površine. Pri vrednotenju dostopnosti oziroma oddaljenosti objektov za osnovnošolca najvišjega interesnega ranga, je posebej izstopala ugotovitev, da so v kolesarsko omrežje zelo slabo vpete kar tri osnovne šole (Gorica, Šalek, Livada), pa tudi to, da s sklenjeno kolesarsko stezo mestno središče še vedno ni povezano z rekreacijskim območjem ob Velenjskem in Škalskem jezeru. Kljub temu da so ob jezerih dobro urejene poti za kolesarje, ki omogočajo tudi kolesarjenje do Šoštanja, je dostop do teh na posameznih odsekih, predvsem z vidika varnosti, otežen.
Delno bi lahko kolesarski promet izboljšali že z boljšo prometno signalizacijo, ki bi kolesarje usmerjala od ene do druge kolesarske poti. Dostop s kolesom do določenih točk oziroma objektov je namreč mogoč, vendar kolesarske povezave niso sklenjene po najkrajših in najpogosteje uporabljanih poteh.

Glede na rezultate analize predlagamo, da bi podaljšali vsaj dve obstoječi kolesarski poti. Pot ob Paki bi se morala s talno označbo nadaljevati še po Vodnikovi cesti, saj bi tako povečala (omogočila) dostopnost do dveh osnovnih šol, do Šolskega centra Velenje, Multimedijskega centra Kunigunda, Knjižnice Šolskega centra Velenje in Kulturnega doma. Predvsem zaradi izboljšanja varnosti mladih kolesarjev pa bi bilo dobro s kolesarskim omrežjem na obeh straneh povezati tudi stezo, ki bi vodila do stadiona in drugih objektov za rekreacijo v okolici jezer. Kolesarska steza ob Cesti Simona Blatnika bi se lahko nadaljevala do teniških igrišč, Bele dvorane in čolnarne, steza ob Kidričevi cesti pa do stadiona. Že s temi dopolnitvami bi se ocena kvalitete kolesarskega omrežja po uporabljeni metodi s 116 točk dvignila na 148 točk, kar pomeni, da bi se kvaliteta omrežja izboljšala za več kot četrtino.

6 ZAKLJUČEK

Raziskovalna naloga posega na dve področji matematike. Prvi del sodi med vsebine teoretične matematike. Ukvarja se z razdaljo, ki jo osvetli z različnih vidikov. Pojem je predstavljen s primeri iz vsakdanjega življenja, v nadaljevanju pa so predstavljeni pojmi, ki so definirani s pomočjo razdalje. V drugem delu naloge mladi raziskovalki s pomočjo prenašanja teorije v prakso skušata prikazati aplikativnost matematične metode. Teorija manhattan razdalje je uporabljena kot pripomoček pri iskanju argumentov za predlog izboljšanja oziroma dopolnitve kolesarskega omrežja v Velenju. Ugotovili smo, da lahko manhattan razdaljo uporabimo, kljub temu da omrežje kolesarskih poti v Velenju ni (matematično) pravilnih oblik. Manhattan razdaljo namreč uporabljamo na majhnih razdaljah, kjer prihaja do majhnih odstopanj oziroma majhnih napak. Velenju je tako pripisana lastnost Manhattna na majhnih območjih – kot temu pravimo v matematiki: lastnost velja lokalno.
Vrednost prvega dela naloge je predvsem v tem, da bralcu približa dve naravni poti razmišljanja v matematiki. Ena od teh je opisovanje predmeta raziskovanja, ki izhaja iz narave, z bistvenimi lastnostmi, s čimer smo se sposobni oddaljiti od ukoreninjenih predstav o danem pojmu. Druga pot pa je spremljanje razvoja posameznih matematičnih pojmov v konkretnih primerih zgolj na podlagi suhoparnih definicij. Obe poti sta v raziskovalnem delu matematika ves čas prisotni, zato smo na primeru razdalje bralcu razložili, kako poteka analiza nekega matematičnega objekta, ki bi ga v novi obravnavi lahko nadomestili z drugim. Na primer s kotom, števili, z računskimi operacijami, množicami ali s precej bolj zapletenimi matematičnimi pojmi. Prav tako še vedno ostaja raziskovalni izziv nadaljnja analiza razdalje. Lahko bi si pobliže ogledali še druge geometrijske pojme, vezane na razdaljo (na primer elipso, parabolo in hiperbolo). Lahko bi pozornost posvetili znanim izrekom iz geometrije, kakršna sta Pitagorov in Talesov izrek. Ali pa bi se ukvarjali z bolj fizikalnimi vsebinami ter obravnavali hitrost in pospešek v povezavi z različnimi dolžinami poti. Vendar pa je predpogoj za nadaljnje delo seveda dobro poznavanje osnovnega koncepta (v tem primeru razdalje) in poznavanje različnih primerov, ki nas za nadaljnje delo naučijo, da moramo vsak korak tehtno premisliti ter predpostavljati izključno temeljne informacije. Tako je naloga predvsem nabor znanja, ki omogoča nadaljnje teoretično raziskovanje.
Drugi del naloge skuša združiti to, kar se marsikomu zdi nemogoče in je tudi v matematičnem okolju dejansko izjemno težko: združiti torej idejno lepo, a v resničnem svetu neponovljivo teoretično idejo in aplikativno delo. Raziskovalec, ki se ukvarja s tem področjem, bo znal povedati, da razvoj metode ne zajema le njene idejne zasnove, ampak tudi nenehno izboljševanje, ki je pogojeno s kvaliteto v praksi pridobljenih rezultatov. In prav tu se skriva bistveno nasprotje idej: na eni strani logično osnovana teoretična dejstva, katerih resničnost je zlahka podkrepljena in dokazljiva, na drugi pa uporabne metode, katerih vrednost in pravilnost lahko pokaže le uspešna večkratna uporaba, ki daje dobre, verodostojne rezultate. V nalogi predstavljena metoda temelji na preprosti logiki in na nekoliki prilagojeni ideji iz teoretičnega dela naloge. Zavedamo se, da ni optimalna in bralec ob njej zagotovo dobi lastne zamisli, ki so drugačne, morda boljše od naših. Vendar smo svoj namen dosegli: preko enostavnega primera smo zasnovali bistvene lastnosti aplikativne metode, ki nam bo z nadgradnjo in izboljšanjem v prihodnje morda omogočila izdelavo resnično uporabnega pripomočka za umeščanje objektov v prostor.
Zaključujemo pa takole. Ptolomej je na podlagi svojih opazovanj verjel, da se planeti in sonce vrtijo okoli zemlje. Trajalo je več kot dve tisočletji, da je človeštvo podvomilo in je Nikolaj Kopernik v središče vrtenja postavil sonce. Sprva mu ni nihče verjel, saj se njegove napovedi o vidnosti planetov niso zdele nič boljše od Ptolomejevih. Skoraj sto let kasneje je po izumu

teleskopa Galileo Galilei sonce trdno prikoval v središče. In je bil za to obtožen čarovništva. Danes o tem ne dvomi nihče. Vsi pa se sprašujemo, ali je vesolje neskončno ali ne. Zato preprosto sprejmimo, da najbrž ne bomo našli konca tega neskončnega potovanja. Začeli pa smo dobro. In ko pogledamo nazaj, vidimo: »Ni tako daleč kot se zdi!«

7 POVZETEK

Raziskovalna naloga spada na področje matematike in logike. Vsebinsko je razdeljena na dva dela. V prvem se spoznamo s pojmom razdalje ter si ogledamo primere šahovskih razdalj, poštne razdalje in manhattan razdalje, nato pa pojem še matematično opišemo z definicijo metrike. Sledi obravnava dveh sorodnih pojmov – krožnice in simetrale, ki ju prav tako predstavimo z zgoraj podanimi primeri. Drugi del obravnava vprašanje kolesarskega prometa v mestni občini Velenje. S pomočjo logike in znanja iz prvega dela je prikazana metoda za vrednotenje obstoječih kolesarskih povezav. Na podlagi rezultatov je najprej podana analiza obstoječega stanja, nato pa predlog za dopolnitev omrežja in njegova kvalitativna ocena.

8 ZAHVALA

Za vodstvo in usmerjanje ob najinih prvih raziskovalnih korakih se iskreno zahvaljujeva mentorjema, Urošu Kuzmanu in Metodi Finkšt.
S podatki o velenjskem kolesarskem omrežju in kartografskim prikazom območja kolesarskih poti nama je rade volje pomagala Katarina Ostruh iz Urada za okolje in prostor Mestne občine Velenje, za kar sva ji zelo hvaležni.
Zahvaljujeva se tudi najinemu učitelju fizike Borisu Bubiku, ki je priskočil na pomoč pri oblikovanju naloge.
Za prijazno pomoč, podporo in spodbudo pri spoznavanju raziskovalnega dela in gibanja Mladi raziskovalci za razvoj Šaleške doline se zahvaljujeva koordinatorici Marjeti Primožič.

Raziskovalna naloga ni mačji kašelj. Sploh, če se je lotevaš prvič. Zaradi vseh zgoraj naštetih lahko naslov najine naloge ob koncu uporabiva tudi v prenesenem pomenu. Ni tako daleč kot se zdi! Ni tako daleč kot se je zdelo na prvem srečanju z mentorjema. Še enkrat hvala vsem, ki ste z nama prehodili razdaljo do najinega prvega raziskovalnega cilja.

Hvala!

Vaši:

Fotografija 1: Mladi raziskovalki Špela in Tisa
Foto: Boris Bubik.

9 PRILOGA

Priloga 1: Karta kolesarskih poti v mestni občini Velenje

10 VIRI IN LITERATURA

1. DEVIDE, V. Konveksni likovi. V: Matka 17, št. 65 (2008/2009). Str. 5–7.
2. KOLAR, M. Matematika napenjanja vezalk. V: Presek, št. 35 (2007/2008). Str. 4–5.
3. KORPNIK, N. Arhitekturna pripoved Velenja (po resničnih dogodkih). V: Arhitekturna delavnica Velenje 2000 – možnosti prostorskega razvoja južno od Šaleške ceste. Velenje, 2000.
4. LAVRIČ, B. Bliže k razdalji. V: Presek št. 5, let. 16 (1988/1989). Str. 316–322.
5. MAROSKA, R. et al.1996. Presečišče 8. Matematika za osmi razred osnovne šole. DZS Ljubljana, 1996.
6. POLES, R. Indutrijska arhitektura v Šaleški dolini. V: Velenje, zbornik raziskovalnega tabora. ERICo Velenje, 2001. Str. 233-251.
7. RAKANOVIĆ, A. et al. Stožnice v taksi razdalji. Matematično raziskovalno srečanje. MARS, 2007. Str. 1–7.
8. ŠPEH, N., OSTRUH, K. 2006. Kolesarsko omrežje v Mestni občini Velenje – 3. faza, Poročilo za leto 2005. ERICo Velenje, 2006.
9. ŽUPANČIČ, O., A. 2006. O ustvarjalnosti v znanstvenem raziskovanju. Vabilo na dvom o dvomu. Založba ZRC Ljubljana, 2006.

Spletne strani:

1. http://books.google.com/books?hl=sl&id=IW7ICV0QXWwC&dq=taxicab+geometry &printsec=frontcover&source=web&ots=QyA25kUfEb&sig=NxCwpqw2i6rI9-WefFMryeABEjg&sa=X&oi=book_result&resnum=9&ct=result#PPP9 (12. 12. 2008)
2. http://www.learner.org/teacherslab/math/geometry/shape/taxicab/ (12. 12. 2008)
3. http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/teaching/projects.pr.98/tesson/taxi/644project.html (14. 2. 2008)
4. http://library.thinkquest.org/06aug/02430/ (14. 12. 2008)
5. http://www.physics.orst.edu/~tevian/taxicab/html/ (14. 12. 2008)
6. http://www.math.umt.edu/tmme/vol2no1/TMMEv2n1a5.pdf (14. 1. 2009)
7. http://www2.hmc.edu/www_common/hmnj/greenspan.pdf (10. 11. 2008)
8. http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/DDavis/Taxicab/taxicab.html (12. 12. 2008)
9. http://en.wikipedia.org/wiki/Taxicab_geometry (10. 11. 2008)