OSNOVNA ŠOLA NAZARJE
Zadrečka cesta 37, 3331 Nazarje

MLADI RAZISKOVALCI ZA RAZVOJ ŠALEŠKE DOLINE

RAZISKOVALNA NALOGA

ZVENEČA MATEMATIKA

Tematsko področje:
MATEMATIKA IN LOGIKA

Avtorja:
Jure MAZEJ, 8. razred
Nejc VENEK, 8. razred

Mentorica:
Mateja Tevž Srčič

Somentorica:
Maja Jelen, prof.

Nazarje, 2010

Raziskovalna naloga je bila opravljena na Osnovni šoli Nazarje.

Mentorica: Mateja Tevž Srčič, PU matematike in fizike

Somentorica: Maja Jelen, prof. bibliotekar

Datum predstavitve:

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

ŠD OŠ Nazarje, 2010

KG matematika, glasba, povezave

AV MAZEJ, Jure/VENEK, Nejc

SA Tevž Srčič, Mateja / Jelen, Maja

KZ 3331 Nazarje, SLO, Zadrečka cesta 37

ZA Osnovna šola Nazarje

LI 2010

IN ZVENEČA MATEMATIKA

TD Raziskovalna naloga

OP V, 21 s., 11 notnih zapisov, 12 slik

IJ SL

JI sl/en

AI Z glasbo so se ukvarjali že starogrški matematiki, kot so Pitagora, Didimos, Aristotel, Platon in Sokrat, zanimanje za matematiko pa kažejo tudi mnogi sodobnejši glasbeniki. Ugotovili smo, da med matematiko in glasbo obstajajo mnoge povezave, vendar smo podrobneje obdelali le nekaj tistih, ki smo jim bili kos z osnovnošolskim znanjem. Povezave smo opisali na področju glasbe z notnimi vrednostmi, taktom, metrumom, transponiranjem, rakovim postopom, rakovo inverzijo, glasbenimi ključi, diminucijo, avgmentacijo, notnim črtovjem in frekvenco tonov, matematično pa z ulomki kot deli celote, potencami, geometrijskim zaporedjem, razširjanjem in krajšanjem ulomkov, simetrijo, translacijo, razmerji, vzporednostjo in množico racionalnih števil. Ugotovili smo, da je povezav precej več, kot se zdi na prvi pogled. Naloga nam je odprla nove vidike uporabe matematičnih znanj na drugih področjih.

KEY WORD DOCUMENTATION

ND The primary school Nazarje, 2010

CX maths, music, connection

AU MAZEJ, Jure/VENEK, Nejc

AA Tevž Srčič Mateja, Jelen Maja

PP 3331 Nazarje, SLO, Zadrečka cesta 37

PB The primary school Nazarje

PY 2010

TI VOICED MATHEMATICS

DT research work

NO V, 21 p., 11 note record, 12 pictures

LA sl

AL sl/en

AB Being a very important part of ancient life, music attracted the ancient Greek mathematicians, such as Pythagoras, Didimos, Aristotle, Plato and Socrates. Nowadays, however, a number of contemporay musicians show great interest in mathematics. Although we have established many connections between mathematics and music, in our research we have focused, in accordance to our level knowledge, on a few of them. Connection at the field of music has been presented through musical values, time (rhytm), metre, transponing, retrograde combinatoriality, retrograde inversion, musical keys, diminution, augmentation, stave and tone frequency.
At the field of mathematics we have presented the connection between music and mathematics through fractions as parts of the whole, exponents, geometrical sequence, expansion and simplification of fractions, symetry, translation, proportions (relations), parallelism, and mass of rational numbers.
The results of the research have clearly indicated that the links between mathematics and music are much stronger than it seemed at first sight. The research work has thus opened new prespectives in the application of mathematical skills at many other areas.

KAZALO VSEBINE

KAZALO NOTNIH ZAPISOV

KAZALO SLIK

SEZNAM UPORABLJENIH OKRAJŠAV

Hz – Herz
$\neq$ – ni enako
$\in$ – je element, leži na
Npr. – na primer
N – naravna števila
Z – cela števila
Q – racionalna števila
R – realna števila
q - konstanta

1 UVODNE MISLI

1.1 Uvod

Vsak se kdaj vpraša, kako bi lahko združili dva tako različna pojma, kot sta matematika in glasba. Na videz nimata prav nobenih podobnosti, saj je matematika naravoslovna in abstraktna veda, glasba pa vrsta umetnosti. Zanimivo pa postane, ko iščemo podatke o velikih matematikih in ugotovimo, da so bili mnogi med njimi tudi dobri glasbeniki in obratno. Zaradi tega smo se odločili, da raziščemo, ali lahko določene glasbene vsebine interpretiramo matematično.

1.2 Hipoteze

V glasbi lahko najdemo mnogo matematičnih vsebin.
Nekatere zakonitosti v glasbi lahko razložimo tudi z osnovnošolskim znanjem matematike.
Glasba je že od nekdaj zanimala matematike.
Veliko glasbenikov je bilo tudi matematikov.

1.3 Namen naloge

Namen naloge je raziskati povezave med matematiko in glasbo, s čimer bi radi osvetlili tudi to področje uporabe matematike v vsakdanjem življenju. Osredotočili se bomo predvsem na tiste primere, ki jih lahko pojasnimo z osnovnošolskim znanjem.

2 PREGLED OBJAV

2.1 Kaj je matematika

Matematika je znanost o številih, množicah in strukturah v njih, o zvezah med njimi itd. Njeni zgodovinski začetki izhajajo iz opazovanja naravnih pojavov, kar je pripeljalo do pojma števila. Matematika je razvila postopke, s katerimi v okviru abstraktnih pojmov pride do logičnih izjav. Pri tem uporablja računske znake, s katerimi izrazi zveze med matematičnimi spremenljivkami, njihove povezave in operacije med njimi. (Javornik, 1998, 5, str. 2507)

2.2 Kaj je glasba

Glasba je urejeno sosledje zvočnih dogajanj v ritmično urejenem časovnem poteku. (Javornik, 1998, 3, str. 1260)

2.3 Znani matematiki – glasbeniki

Znano je, da so se z glasbo ukvarjali, jo preučevali in cenili že starogrški matematiki, kot so Pitagora, Aristotel, Platon, Sokrat, Didimos in drugi. Eden največjih znanstvenikov Albert Einstein (1879–1955) je poleg matematike in fizike študiral tudi glasbo in postal dober violinist. Karlheinz Stockhausen (1928–2007) je bil eden najpomembnejših povojnih skladateljev in pionir elektronske glasbe. Ustvarjal je glasbo, ki sloni na matematičnih pravilih in dognanjih italijanskega matematika Fibonaccija, ki je proučeval matematična zaporedja in druge matematične fenomene. Karl Yul'yevich Davidov (1838–1889) je bil ruski violončelist in skladatelj, študiral pa je tudi matematiko na moskovski univerzi in diplomiral leta 1858. Philip Glass (1937–) je eden izmed klasikov sodobne glasbe, ki je najprej študiral matematiko in filozofijo, nato pa se je posvetil komponiranju glasbe. Tudi slovenski skladatelj Marjan Kozina (1907–1966) je najprej študiral matematiko in filozofijo.

2.4 Pitagora in glasba

Legenda pravi, da je Pitagora dobil navdih za svoje raziskovanje glasbene lestvice, ko je nekega lepega dne šel mimo kovačnice. Slišal je, da različno težka kovala različno zvenijo in da tista, katerih teža je v enostavnem sorazmerju, zvenijo ubrano. Začel je raziskovati v tej smeri, najprej s struno, nato je dognanja posplošil še na druga glasbila. Tako je prišel do prve matematično podane glasbene lestvice. S struno je začel, ker je igral liro. Ugotovil je, da dve struni zvenita ubrano, če sta njuni dolžini v razmerju 1:2, pri čemer zazveni oktava, 2:3, pri čemer zazveni kvinta, ter 3:4, pri čemer zazveni kvarta. Na več kot štiri dele strune ni delil. Lestvico je sestavil s kvintnimi skoki, in sicer za en navzdol in pet navzgor, ker je tako dobil vse ubrane intervale. Skupaj z osnovnim tonom je prišel do zaporedja: 2/3, 1, 3/2, 9/4, 27/8, 81/16, 243/32. Pitagora pa je naredil napako, ker je struno razdelil na največ 4 dele. Terco in seksto dobimo iz razmerij 4:5 in 3:5, torej z delitvijo strune na pet delov. Napako je okrog leta 20 pr. n. št. popravil Didimos in dobil je lestvico čiste uglasitve (naravno lestvico): 1, 9/8, 5/4, 4/3, 3/2, 5/3, 15/8, 2.

2.5 Obrazložitev glasbenih in matematičnih pojmov

Glasbeni pojmi:

1. Notno črtovje

Notno črtovje je linijski sistem, pet vodoravnih vzporednih črt, na, med, nad in pod katere pišemo note. Je pot, po kateri gredo note, ko ustvarjajo glasbo, ključ pa jim pove, na kakšen način. Notno črtovje in ključ sta nerazdružljiva.

2. Notna vrednost

Notna vrednost je trajanje tona, ki je zapisano z grafičnimi znaki – notami. Note, ki jih poznamo, so celinka, polovinka, četrtinka, osminka, šestnajstinka, manj znane pa so tudi dvaintridesetinka, štiriinšestdesetinka in stoosemindvajsetinka.

3. Metrum

Metrum je posebni ritmični red v skladbi, ki sloni na razmerju med težkimi in lahkimi dobami v taktu.

4. Taktovski način

Takt je zapis metruma skladbe, notacijska razdelitev tonskega poteka na enakomerno zaporedje enako dolgih poudarjenih in nepoudarjenih časovnih enot (dob), to je v časovno enake skupine. Takt ločuje taktnica, označujejo jih taktovski načini. Taktovski načini so enostavni in sestavljeni.

5. Transponiranje

Transponiranje je prestavitev neke melodije višje ali nižje za izbrani interval.

6. Interval

Interval je višinska razdalja med dvema tonoma, če tona sledita drug drugemu ali če sočasno zvenita. Ločimo čiste intervale (prima, kvarta, kvinta, oktava) ter velike in male intervale (sekunda, terca, seksta, septima).

7. Glasbeni ključ

Glasbeni ključ je znak na začetku notnega črtovja, ki natančno določa višino tona in s tem tudi celotnega notnega sistema. Razvil se je iz črk za oznako tona. Poznamo basovski, baritonski, tenorski, altovski, sopranski in violinski ključ.

8. Rakov postop

Rakov postop je točna rakova oblika teme, to je potekajoča od zadnjega do prvega tona, v rakovem kanonu nastopata prema in rakova oblika teme tudi sočasno, rakova obrnitev je nazaj potekajoča in obrnjena (navzgor –navzdol) vrsta vseh v temi nastopajočih intervalov. Rakov postop so tudi zrcalne slike (zrcaljenje melodije).

9. Avgmentacija

Avgmentacija pomeni pomnožiti, povečati, pospeševati. Je postopek pri komponiranju, kjer gre za podvojitev ali trikratno povečanje notnih vrednosti melodičnih tonov, motivov, tem, fraz. Pri avgmentaciji spreminjamo dolžino trajanja tonov – jih podaljšujemo.

10. Diminucija

Diminucija pomeni razdrobiti, pomanjšati. Je ponovitev melodije, motiva, fraze v zmanjšanih notnih vrednostih (za polovico ali več), je okrajševanje melodije z notami manjših ritmičnih vrednosti. Pri diminuciji spreminjamo dolžino trajanja tonov – jih skrajšujemo.

11. Frekvenca

Frekvenca nihanja ali število nihajev v časovni enoti nam določa višino tona. Pri slišnem zvoku se frekvenčno območje giblje med 20-timi in 20-tisočimi nihaji v sekundi oziroma govorimo o frekvenčnem spektru 20 Hz do 20 000 Hz.

Matematični pojmi:

1. Vzporednost

Vzporednost ali paralelnost je ena od možnih medsebojnih leg premic in ravnin. Dve premici v ravnini sta vzporedni, če nimata nobene skupne točke.

2. Deli celote – ulomki

Ulomek je racionalno število, ki nam predstavlja d**e**l celote. Zapišemo ga v obliki $\frac{a}{b}$, pri čemer sta a in b celi števili in $b \neq 0$. Število a imenujemo števec ulomka, saj nam šteje dele, število b pa imenovalec ulomka, ker nam dele celote poimenuje.

3. Razširjanje in krajšanje ulomkov

Ulomek razširimo tako, da števec in imenovalec ulomka pomnožimo z istim naravnim številom, krajšamo pa tako, da števec in imenovalec delimo z istim naravnim številom. Pravimo, da je ulomek okrajšan, če sta števec in imenovalec tuji si števili. Dobljeni ulomek pri razširjanju ali krajšanju predstavlja isto racionalno število kot prvotni.

4. Potenca

Potenca je produkt n enakih faktorjev a. Zapis je sestavljen iz osnove a in stopnje n, torej a^n in velja $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \quad \{n - krat\}$, pri čemer je $a \in R \; in \; n \in N$.

5. Geometrijsko zaporedje

Zaporedje je geometrijsko natanko tedaj, kadar je količnik sosednjih členov konstanten.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = konst.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

$$a_1, a_2 = a_1 \cdot q, a_3 = a_2 \cdot q, ..., a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

6. Vzporedni premik

V matematiki je translacija ali vzporedni premik preslikava, pri kateri se vse točke dane množice premaknejo za enako razdaljo v isti smeri. Pri tem nas zanima samo povezava med začetno in končno lego, zato lahko privzamemo, da gre za premi premik. Tak premik lahko opišemo z vektorjem.

7. Zrcaljenje

Zrcaljenje je geometrična preslikava, ki vsaki točki priredi točno določeno zrcalno sliko.

8. Osno somerne množice točk

Množica točk je osno somerna (simetrična) takrat, kadar obstaja vsaj ena premica, čez katero se dana množica točk prezrcali sama vase. Premico imenujemo somernica (simetrala) dane množice.

9. Središčno somerne množice točk

Množica točk je središčno somerna (simetrična), kadar obstaja točka S, čez katero se dana množica točk prezrcali sama vase. Točko S imenujemo središče somernosti.

10. Racionalna števila

Racionalna števila so števila, ki jih lahko izrazimo v obliki ulomka kot količnik dveh celih števil $\frac{a}{b}$, kjer je $b \neq 0$. Tvorijo neskončno množico racionalnih števil Q.

11. Številski sestav

Številski sestav ali sistem je sistem, v katerem so urejena števila. Gradniki številskega sistema so števke ali cifre, s katerimi lahko po določenih pravilih sestavljamo skupine številk, ki predstavljajo števila v izbranem številskem sistemu.

3 METODE RAZISKOVANJA

3.1 Čas raziskovanja

Raziskovali smo od novembra 2009 do marca 2010.

3.2 Raziskovalni vzorec in raziskovalne metode

Sestavili smo načrt raziskovalnega dela:

1. V razpoložljivi literaturi (spletne strani, tiskani viri) poiskati povezave med matematiko in glasbo.
2. Razložiti pomen uporabljenih glasbenih in matematičnih pojmov.
3. Poiskati ustrezne glasbene primere.
4. Analizirati glasbene primere in poiskati v njih matematične segmente.

3.3 Material

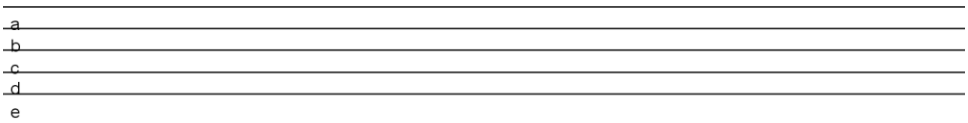
Pri delu smo potrebovali:

- notne zapise,
- računalniški program Finale za zapisovanje not,
- računalniški program GeoGebra za načrtovanje geometrijskih slik.

4 REZULTATI IN RAZPRAVA

4.1 Notno črtovje

Notni zapis 1: Notno črtovje

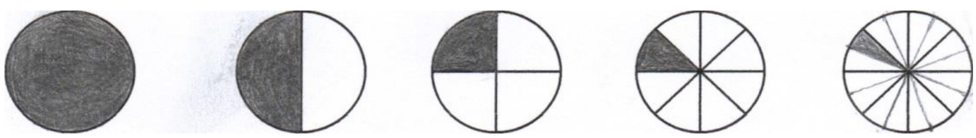


Slika 1:Vzporedne premice

Notno črtovje je sestavljeno iz petih geometrijskih elementov – premic, ki so med seboj v vzporedni legi. Note v notno črtovje zapisujemo kot točke, ki ležijo ali ne ležijo na danih premicah. Matematično velja, da lahko med dvema vzporednicama narišemo neskončno mnogo točk, medtem ko v glasbi lahko med dvema notnima črtama zapišemo eno samo noto. Note, ki se nahajajo izven notnega črtovja, ponazorimo s pomožnimi črtami, ki bi lahko predstavljale tudi dodatne vzporednice, ki pa jih zaradi boljše preglednosti zapisa ne rišemo v celoti.

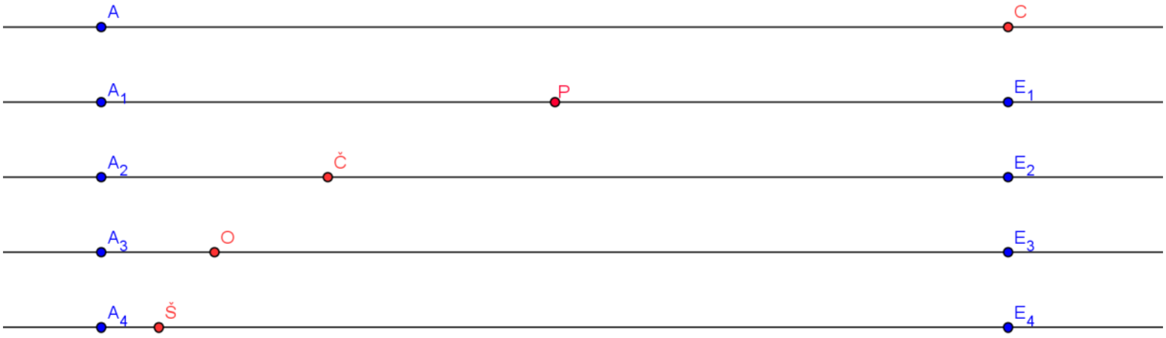
4.2 Notne vrednosti

Notni zapis 2: Notne vrednosti



1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$

Slika 2: Deli celote

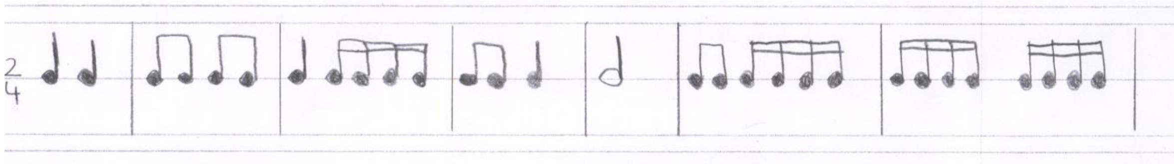


Legenda: C – celinka, P – polovinka, Č – četrinka, O – osminka, Š – šestnajstinka
$|AC| = 1$
Slika 3: Deli celote na številski osi

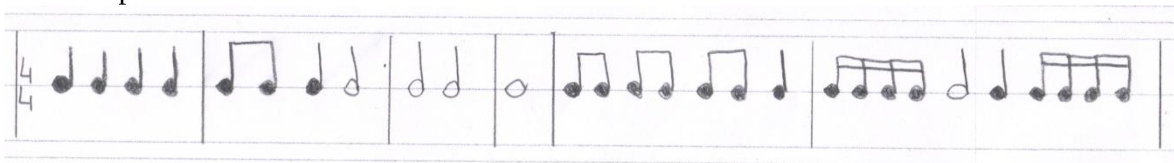
Notne vrednosti lahko matematično predstavimo kot dele celote. Nota celinka in celinska pavza predstavljata celoto 1, polovinka in polovinska pavza ulomek $\frac{1}{2}$, četrtinka in četrtinska pavza ulomek $\frac{1}{4}$, osminka in osminska pavza ulomek $\frac{1}{8}$, šestnajstinka in šestnajstinska pavza pa ulomek $\frac{1}{16}$ ... Ugotovimo lahko, da že samo poimenovanje omenjenih notnih vrednosti izhaja iz poimenovanja ulomkov. Prav tako lahko notne vrednosti predstavimo tudi kot potence z osnovo $\frac{1}{2}$ in eksponentom kot naravnim številom. Celinka in celinska pavza predstavljata potenco $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, polovinka in polovinska pavza $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$, četrtinka in četrtinska pavza $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, osminka in osminska pavza $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, šestnajstinka in šestnajstinska pavza pa $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ … Iz notnih vrednosti lahko razvijemo celo geometrijsko zaporedje s konstanto q= $\left(\frac{1}{2}\right)$ in začetnim členom a_1=1, kar izgleda zapisano v zaporedju kot $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ … Teoretično je mogoče notne vrednosti razširiti tudi na dvaintridesetinko, štiriinšestdesetinko, stoosemindvajsetinko itd., kar ustreza tudi zgoraj omenjenim matematičnim principom, vendar pa se v praksi tako majhne notne vrednosti ne uporabljajo prav pogosto. Zaradi omenjenega dejstva so vsi primeri opisani zgolj do šestnajstinke.
Z razširjanjem in krajšanjem ulomkov lahko ugotovimo tudi zamenjave posameznih notnih vrednosti z drugimi. Nota celinka ali celinska pavza ima enako vrednost kot dve polovinki ali polovinski pavzi, štiri četrtinke ali četrtinske pavze, osem osmink ali osminskih pavz ter šestnajst šestnajstink ali šestnajstinskih pavz. Matematično lahko ta princip opišemo kot razširjanje ulomkov, v obratni smeri pa kot krajšanje z 2, 4 ali 8 (2^n).

$1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8} = \frac{16}{16} = \cdots$ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \cdots$ $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \cdots$ $\frac{1}{8} = \frac{2}{16} =$...

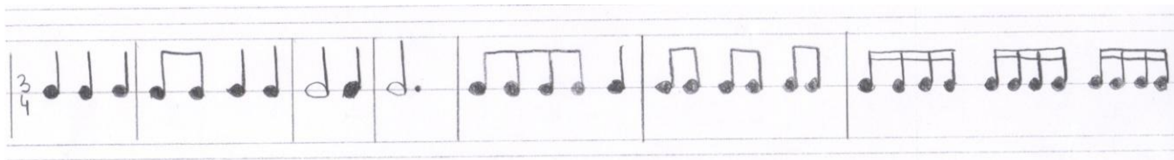
4.3 Takt in taktovski način



Notni zapis 3: Dvočetrtinski takt

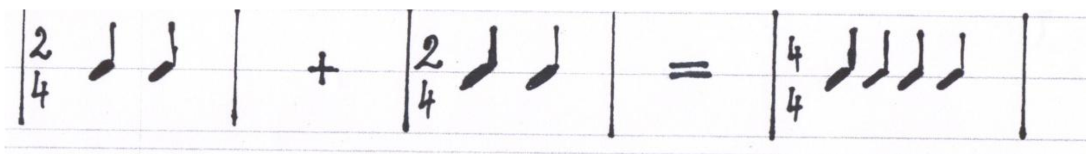


Notni zapis 4: Štiričetrtinski takt



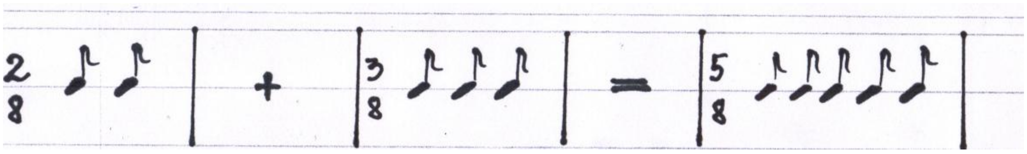
Notni zapis 5: Tričetrinski takt

Glasbeno ločimo enostavne in sestavljene taktovske načine. Enostavni imajo le eno poudarjeno dobo, mednje uvrščamo dvodobne in tridobne taktovske načine: npr. 2/4 (dvočetrtinski), 2/2 (dvopolovinski), 2/8 (dvoosminski), 3/4 (tričetrtinski), 3/2 (tripolovinski), 3/8 (triosminski) itd. Taktovski način zapišemo z ulomki. Števec pove število dob v taktu, imenovalec pa trajanje njihove osnovne dobe oziroma njihovo ritmično vrednost. Sestavljeni taktovski načini so različne kombinacije dvo- in tridobnih taktovskih načinov. Imajo po več poudarkov, med katerimi je prvi najmočnejši, preostali pa so postopoma šibkejši. Taktovske načine lahko zamenjamo z enakovrednimi drugimi taktovskimi načini, npr. tričetrtinski in šestosminski taktovski način. Primeri sestavljenih taktovskih načinov so 4/4 takt, ki je sestavljen iz dveh 2/4 taktov, 5/8 takt, ki je sestavljen iz 2/8 + 3/8 takta ali iz 3/8 + 2/8 takta, 7/4 takt, ki je sestavljen iz dveh 2/4 in enega 3/4 takta itd.
Osnovne taktovske načina lahko matematično ponazorimo z ulomki. Zamenjavo taktovskih načinov z enakovrednimi drugimi taktovskimi načini pa opišemo kot razširjanje ali krajšanje ulomkov. Sestavljene taktovske načine dobimo s pomočjo seštevanja ulomkov.



Slika 4: Seštevanje ulomkov z enakimi imenovalci

$$\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}=1$$



Slika 5: Seštevanje ulomkov z enakimi imenovalci

$$\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

Pri seštevanju ulomkov velja, da morajo imeti seštevanci enake imenovalce, nato pa števce med seboj seštejemo, imenovalec pa prepišemo.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad c \neq 0 \ \ in \ \ a,b,c \in Z$$

Pri zgoraj navedenih primerih je omenjeni pogoj že izpolnjen. Teoretično bi lahko sestavili še druge sestavljene taktovske načine, pri katerih bi morali najprej izvesti zamenjavo enega izmed osnovnih taktovskih načinov z enakovrednim drugim taktovskim načinom, nato pa bi lahko želeni sestavljen taktovski način zapisali. Na ta način bi hkrati uporabili razširjanje ulomkov na skupni imenovalec in šele v nadaljevanju seštevanje ulomkov.

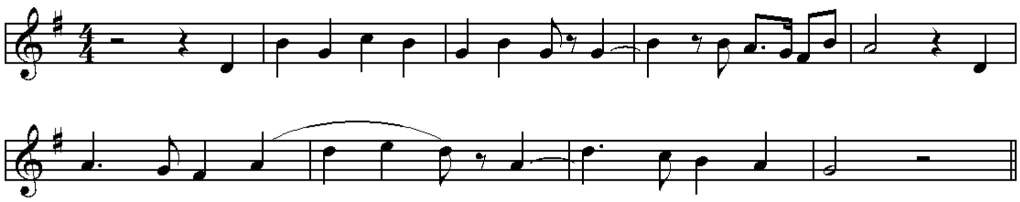
Npr. za sestavo 11/8 taktovskega načina bi lahko uporabili 3/4 in 5/8, kar bi matematično zapisali:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{6}{8}+\frac{5}{8}=\frac{11}{8}$$

Slika 6: Seštevanje ulomkov z različnimi imenovalci

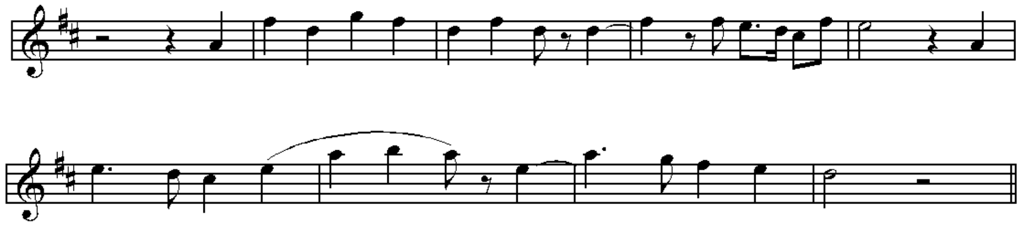
4.4 Transpozicija

TAM GOR NA RAVNEM POLJU

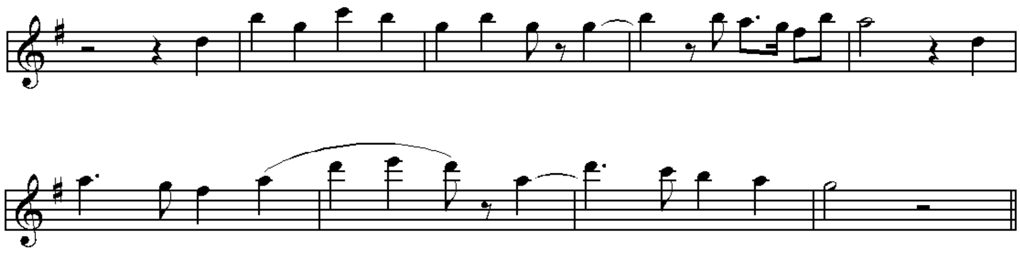


TRANSPOZICIJA ZA VELIKO TERCO NAVZGOR

TRANSPOZICIJA ZA ČISTO KVINTO NAVZGOR

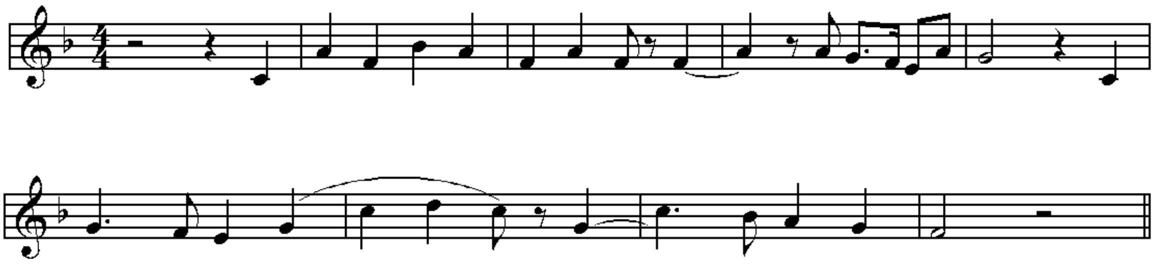


TRANSPOZICIJA ZA ČISTO OKTAVO NAVZGOR



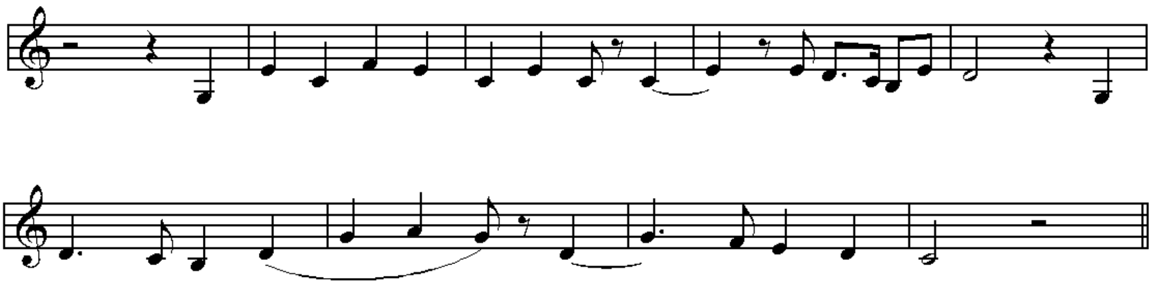
Notni zapis 6: Transpozicija navzgor

TRANSPOZICIJA ZA VELIKO SEKUNDO NAVZDOL



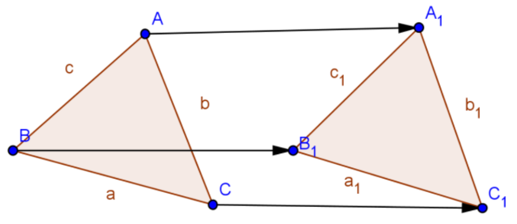
TRANSPOZICIJA ZA VELIKO TERCO NAVZDOL

TRANSPOZICIJA ZA ČISTO KVINTO NAVZDOL

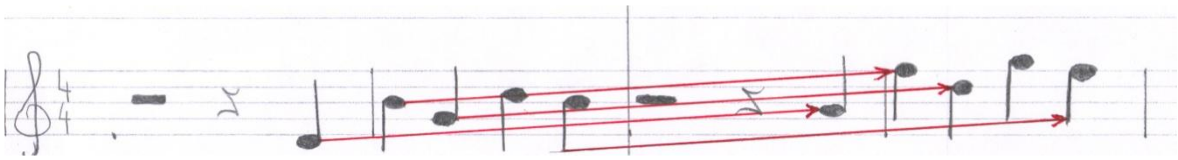


Notni zapis 7: Transpozicija navzdol

Znano je, da nam akordi neke pesmi dostikrat ne ustrezajo. Večinoma je tako zato, ker nekaterih delov pesmi ne moremo peti, ker so previsoki ali prenizki. Zato lahko pesem trasponiramo v nek drug dur ali mol. Transponiramo za določen glasbeni interval navzgor ali navzdol. Transponiranje lahko uporabimo tudi pri različno uglašenih instrumentih. Če želimo, da klarinet zveni enako klavirju, ga moramo zvišati za veliko sekundo, saj je klarinet uglašen v B duru, klavir pa v C duru.



Vektor premika AA_1
Slika 7: Vzporedni premik



Slika 8: Vzporedni premik za čisto kvinto navzgor

Glasbena transpozicija se matematično lahko interpretira kot translacija ali vzporedni premik, kjer se množica točk preslika za določeno enako razdaljo v isti smeri. Interval transpozicije je v matematiki predstavljen kot vektor premika. Množica točk, ki jo dobimo z vzporednim premikom, je skladna dani množici točk, prav tako, kot je identična tudi melodija po transpoziciji.

4.5 Glasbeni ključi

Notni zapis 8: Ključi

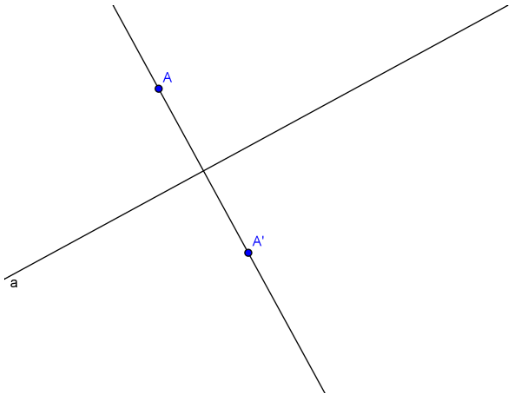
Translacijo najdemo tudi pri uporabi različnih glasbenih ključev, na primer violinskega, basovskega, altovskega in tenorskega.
Violinski ključ ima c_1 na prvi spodnji pomožni črti, basovski na prvi zgornji pomožni črti, altovski na tretji črti in tenorski na četrti črti.
Uporabo različnih glasbenih ključev, kjer lahko isto melodijo predstavimo z drugačnim zapisom, lahko v matematiki primerjamo z zapisovanjem števil v različnih številskih

sestavih. Za številske sestave velja, da lahko pri zapisu uporabimo števke, ki so manjše od tiste, po kateri je sistem poimenovan. Desetiško število 12 lahko zapišemo v dvojiškem sestavu $1100_{(2)}$, v trojiškem $110_{(3)}$, v štiriškem $30_{(4)}$, v petiškem $22_{(5)}$, v šestiškem $20_{(6)}$, v sedmiškem $15_{(7)}$, v osmiškem $14_{(8)}$ in v devetiškem $13_{(9)}$. Vrednost števila tako ostane enaka prav tako, kot se melodija ne spremeni, če jo zapišemo v različnih glasbenih ključih.

4.6 Rakov postop

Notni zapis 9: Rakov postop

Rakov postop v glasbi pomeni ponovitev teme od zadaj naprej. Matematično lahko rakov postop opišemo kot preslikavo, natančneje kot zrcaljenje čez premico.



Slika 9: Zrcaljenje

Slika 10: Zrcaljenje čez premico

Pri zrcaljenju čez premico se osnovna glasbena tema prezrcali preko srednje taktnice sama vase, torej nam celotna melodija predstavlja osno somerno množico točk.

4.7 Avgmentacija in diminucija

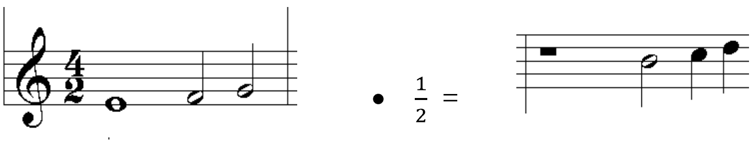
Notni zapis 10: Avgmentacija

Notni zapis 11: Diminucija

Avgmentacija in diminucija v glasbi pomenita razširitev oziroma skrajševanje notnih vrednosti največkrat za dva, redkeje za tri. V zgornjih primerih je prikazana podvojitev in razpolovitev osnovnih notnih vrednosti. Glasbena melodija se pri tem ne spremeni.

Matematično bi lahko diminucijo in avgmentacijo ponazorili kot množenje z 2 ali z $\frac{1}{2}$.

Slika 11: Avgmentacija kot množenje z 2



Slika 12: Diminucija kot množenje z $\mathbf{\frac{1}{2}}$

4.8 Frekvenčna višina tonov

V glasbi vsakemu tonu pripada določena frekvenca nihanja. Ton A_1 niha s frekvenco 440 Hz, naslednji A_2 pa s frekvenco 880 Hz, kar pomeni, da je med A_1 in A_2 za 12 različnih tonov A_1, AIS_1, H_1, C_2, CIS_2, D_2, DIS_2, E_2, F_2, FIS_2, G_2, GIS_2 razpon 440 Hz. Tako vsakemu tonu ne pripada le ena frekvenca, temveč 36,5 Hz. Če upoštevamo, da lahko Hz razdelimo še na neskončno mnogo decimalnih mest, ugotovimo, da je med dvema tonoma še nešteto podtonov. To teorijo lahko primerjamo z množico racionalnih števil, saj velja, da je med vsakima dvema racionalnima številoma še nešteto drugih neenakih racionalnih števil.

5 ZAKLJUČEK

Osnovni namen naše naloge je bil raziskati povezave med matematiko kot naravoslovno vedo in glasbo kot umetnostjo. Želeli smo torej poiskati matematiko v glasbi – zvenečo matematiko. Že v začetku smo ugotovili, da se je mnogo glasbenikov ukvarjalo tudi z matematiko. Prvi začetki tovrstnih povezav segajo že v čas starogrških matematikov. S pomočjo pisne in spletne literature smo poskušali teoretično opredeliti nekatere glasbene in matematične pojme, za katere smo ugotovili, da jih lahko medsebojno povežemo. Na konkretnih primerih smo prikazali povezave, ki smo jih lahko razložili z osnovnošolskim znanjem. Ugotovili smo, da so v glasbi zastopane tako vsebine iz geometrije kot tudi iz algebre in analize. Opisali smo ulomke kot dele celote, razširjanje, krajšanje in seštevanje ulomkov, potence, geometrijsko zaporedje, vzporedni premik, zrcaljenje, vzporednost, neskončno množico racionalnih števil in številske sisteme. Pri delu smo potrdili naše hipoteze, da v glasbi najdemo mnogo matematičnih vsebin, da lahko nekatere zakonitosti v glasbi razložimo tudi z osnovnošolskim znanjem matematike, da je glasba že od nekdaj zanimala matematike in da je veliko glasbenikov bilo tudi matematikov.
Pri našem raziskovanju smo naleteli še na mnogo zanimivih primerov, za katere pa nismo imeli potrebnega matematičnega ali glasbenega znanja za temeljitejšo analizo. Vse to lahko ostane naloga za v bodoče, vsekakor pa smo osvetlili še en primer uporabe matematike v vsakdanjem življenju.

6 POVZETEK

Vsak se kdaj vpraša, kako lahko združimo matematiko kot naravoslovno vedo in glasbo kot umetnost. Osnovni namen raziskovalne naloge je bil poiskati nekaj matematično-glasbenih povezav. Z glasbo so se ukvarjali že starogrški matematiki, kot so Pitagora, Didimos, Aristotel, Platon in Sokrat, zanimanje za matematiko pa kažejo tudi mnogi sodobnejši glasbeniki. Pri delu smo ugotovili, da med matematiko in glasbo obstajajo mnoge povezave, vendar smo podrobneje obdelali le tiste, ki smo jim bili kos z osnovnošolskim znanjem. Povezave smo opisali na področju glasbe z notnimi vrednostmi, taktom, metrumom, transponiranjem, rakovim postopom, rakovo inverzijo, glasbenimi ključi, diminucijo, avgmentacijo, notnim črtovjem in frekvenco tonov, matematično pa z ulomki kot deli celote, potencami, geometrijskim zaporedjem, razširjanjem in krajšanjem ulomkov, simetrijo, translacijo, razmerji, vzporednostjo in množico racionalnih števil. Ugotovili smo, da je povezav precej več, kot se zdi na prvi pogled in kot smo jih v nalogi lahko obdelali. Naloga nam je odprla nove vidike uporabe matematičnih znanj na drugih področjih.

7 ZAHVALA

Zahvala gre vsem, ki so kakorkoli pomagali pri izvedbi raziskovalne naloge.

Posebej se zahvaljujemo za pomoč naši mentorici Mateji Tevž Srčič, ki nas je vodila in vzpodbujala pri delu, somentorici Maji Jelen za svetovanje ter prof. Janezu Mazeju in prof. Katji Gruber za pomoč na glasbenem področju.
Hvala tudi lektorici Nataši Bele in profesorici Metki Meh za pomoč pri angleškem prevodu ter staršem, ki so nas pri delu ves čas podpirali.

8 LITERATURA

1. DORNIK, M. et al. 2002. Kocka 7, 1. del. Ljubljana, Modrijan.
2. Glasba. 1984. Ljubljana, Cankarjeva založba.
3. Glasbena šola Marjana Kozine Novo mesto. (online) 21. feb. 2010 Dostopno na naslovu: http://www.gs-mkozine.si/sl/informacija.asp?id_meta_type=40
4. JAVORNIK, M. 1998. Veliki splošni leksikon založba DZS Ljubljana, knjiga 5 str. 2507
5. JAVORNIK,M. 1998. Veliki splošni leksikon založba BZS Ljubljana, knjiga 3 str. 1260
6. Koncertna lista Akademskega komornega orkestra Musica Viva za 31. julija 2006. Ljubljana, julij 2006, Festival Ljubljana.
7. Koncertna lista godalnega kvartete Smith.(online) 21. feb. 2010 Dostopno na naslovu: http://www.ljubljanafestival.si/sl/prireditve/85/godalni_kvartet_smith
8. Matematika. 1980. Ljubljana, Cankarjeva založba.
9. Opombe iz življenja nekaterih znanih ljudi. (online) 21. feb. 2010 Dostopno na naslovu: http://uc.fmf.uni-lj.si/mi/httpdoc/br/mat.htm
10. Ulomki in glasba. (online) 11. mar. 2010 Dostopno na naslovu: http://beta.e-um.si/lessons/603/
11. Umrl je skladatelj Karlheinz Stockhausen**.** (online) 21. feb. 2010 Dostopno na naslovu:http://www.rtvslo.si/kultura/glasba/umrl-je-skladatelj-karlheinz-stockhausen/153301
12. URAN, prof. T./ DORNIK, M. 1994. Matematični priročnik za osnovno šolo. Ljubljana, DZS.